Izpit iz predmeta numerične metode
7. junij 2001

1. Reši enačbo $f(x) = 0$, kjer je $f(x) = 1 - 6\,x + 32\,x^3$ s pomočjo naslednje iteracijske sheme
$$x_{n+1} = x_n - k\frac{f(x)}{f'(x)}$$
Kjer je k realno število večje ali enako 1. Izberi začetni približek v prvem primeru $x_0 = -1$ in v drugem primeru $x_0 = 1$. Zaporedji kovergirata k dvema različinima ničlama funkcije $f(x)$. Za vsak primer posebej izberi optimalno vrednost parametra k tako, da bo konvergenca čim hitrejša. Poišči ničli na dve decimalni mesti natančno.

2. Ugotovi konvergenco naslednje iteracijske sheme $x_{n+1} = a + \mathbf{A}\,x_n$.
$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} x_n$$

3. Aproksimiraj podatke s funkcijo $f(x, \lambda) = x^2\,e^{\lambda\,x}$, po metodi najmanjših kvadratov tako, da problem lineariziraš.
$$\begin{bmatrix} x: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ y: & 0.35 & 0.54 & 0.45 & 0.30 & 0.17 \end{bmatrix}$$

đumans

Rešitve

1. $x = 1$ in $k = 1$

$$0.7, 0.51, 0.40, 0.33, 0.29, 0.27, 0.26, 0.26, 0.25$$

   $x = 1$ in $k = 2$

$$0.4, 0.26, 0.25$$

   $x = -1$ in $k = 1$

$$-0.72, -0.55, -0.51, -0.50$$

$$F[x] = x - k\frac{f(x)}{f'(x)}$$

   Optimalna vrednost parametra k: $F'[x] = 0$ za $f(x) = 0$

$$F[x] = x - \frac{k\,x}{3} + \frac{k}{6 + 24\,x}$$

$$F'[x] = 1 + \frac{k\left(-1 - \frac{2}{(1+4\,x)^2}\right)}{3}$$

   Za $x = 0.25$ je optimalna vrednost parametra $k = 2$, za $x = -0.5$ je optimalna vrednost paramatra $k = 1$.

2. Matrika $\mathbf{A}$ mora imeti lastne vrednosti absolutno pod 1. Lastne vrednosti matrike so $\lambda_1 = \frac{1}{4}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ in $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ od tod sledi, da je konvergentna. Če najdemo matrično normo, ki je manjša od ena je pogoj za konvergenco izpolnjen.

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \frac{11}{12}$$

3. Lineariziramo in dobimo

$$\log\frac{y}{x^2} = \lambda\,x$$

   in poiščemo λ

$$\lambda = -.99823$$

   Njena vredost je približno ena, torej je iskana funkcija enaka

$$y = x^2\,e^{-x}$$