Izpit iz Numeričnih metod

29. junij 2004

1. Sestavite formulo za približno računanje singularnih integralov oblike

$$\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x}} \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$

   Določite koeficienta, a_1 in a_2 ter vozlišči x_1 in x_2 tako, da bo formula točna za polinome $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$ in $p_3(x) = x^3$. S pomočjo dobljene formule določi približno vrednost za integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

   Pomoč: koeficienta a_i, $i = 1, 2$ lahko pišemo $a_i = 1 \pm b$, medtem ko za vozlišči x_i, $i = 1, 2$ velja $x_i = \frac{3}{7} \mp y$

   Rešitev:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}} \\
a_2 &= 1 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}} \\
x_1 &= \frac{7}{3} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}} \\
x_2 &= \frac{7}{3} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}} \\
0.620331 & \quad \textit{priblizna} \\
0.620537 & \quad \textit{tocna}
\end{aligned}$$

2. Poišči X, tako da bo imela razlika $A\,X - B$ minimalno evklidsko normo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rešitev:

$$X = [7/3, -1/2]$$

3. Na intervalu $[0, 2]$ ležita dva korena enačbe

$$\sqrt{x}e^{-x} - \frac{1}{3} = 0$$

Poišči oba korena. Določi, katerega od njiju lahko poiščemo s pomočjo naslednje iteracijske sheme

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}e^{-x_n} - \frac{1}{3} + x_n$$

pri izbiri primernega začetnega približka. Določi maksimalni podinterval intervala $[0, 2]$ iz katerega lahko izbiramo začetni približek tako, da bo gornja shema konvergirala. Zakaj drugega korena ne moremo poiskati na na ta način?

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.149978 \quad \textit{odbojna} \\ x_2 &= 1.18237 \quad \textit{privlacna} \end{aligned}$$