Izpit iz Numeričnih metod

20. junij 2007

1. Ali lahko rešimo sistem $Ax = b$ z Gauss-Seidlovo iteracijo?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Izračunaj prve tri korake iteracije. Začetni približek izberi $x_0 = [0; 0; 0]$. Kdaj bi se lahko zgodilo, da bi nas iteracijska metoda pripeljala do rešitve v končno korakih?

   Rešitev:
   Gauss-Seidlova iteracija je konvergentna, ker ima matrika `S=-tril(A)^(-1)*triu(A,1)=[0,-1,0;0,0,-1/2;0,0,0]` samo ničelne lastne vrednosti.
   $x_3 = [0, 1/2, 1]$, $x_\infty = [0, 1/2, 1]$.

2. Pokažite, da leži na intervalu $I = [0.1, 1]$ natanko en koren enačbe

$$x + \log x = 0.$$

   Poišči ta koren z Newtonovo metodo.
   Naslednje tri funkcije

$$f(x) = -\log x, \quad f(x) = e^{-x}, \quad f(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x})$$

   imajo natanko eno fiksno točko $x = f(x)$ na intervalu I, ki se ujema z rešitvijo zgornje enačbe. V katerih primerih je ta točka privlačna in v katerih odbojna. Z drugimi besedami, v katerih primerih lahko poiščemo začetni približek, različen od fiksne točke, tako da iteracija konvergira k fiksni točki in kdaj to ni mogoče?

$$x_{k+1} = -\log x_k, \quad x_{k+1} = e^{-x_k}, \quad x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + e^{-x_k})$$

   Rešitev: $x = 0.56714$,

$$f'(x) = -1/x, \quad -e^{-x}, \quad \text{in} \quad \frac{1}{2}(1 - e^{-x})$$

Vrednosti odvodov funkcij $f(x)$ v negibni točki je

$$-1.76291, \ -0.567086, \ 0.216457$$

Prva je odbojna, ker je odvod po absolutni vrednosti večji od 1 drugi dve pa sta privlačni.

3. Reši integral s popravljeno Simpsonovo kvadraturno formulo za singularne integrale in primerjaj rezultat z rešitvijo, točno na tri decimalna mesta, ki jo dobiš s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto.

$$\int_0^{1/2} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} dx$$

Navodilo: $\int_0^{1/2} f(x)/\sqrt{x}\, dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(1/4) + w_3 f(1/2)$

Rešitev:

Tv.: $2\sqrt{x} - 2x^{5/2}/5 + x^{9/2}/9 - \cdots$, $I = 1.348$

Simpson: $\sqrt{2}/15\,(9f(0) + 7f(1/4) - f(1/2))$, $I_s = 1.328$