Izpit iz Numeričnih metod

29. junij 2007

1. Reši robni problem za Airyevo diferencialno enačbo.

   $$y''(x) = -16xy(x), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

   Naj bo $h = 1/4$. Drugi odvod nadomestiš z drugo razliko

   $$\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2}, \quad k = 1, \ldots, 3,$$

   $$y_0 = y(0) \quad \text{in} \quad y_4 = y(1)$$

   Rešitev: Rešiti moramo sistem enačb

   $$\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} = -16x_k y_k, \quad k = 1, 2, 3$$

   Razširjena matrika sistema je

   $$\left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{7}{4} & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & 0 \end{array}\right]$$

   Rešitev je

   $$y_1 = \frac{28}{9}, \quad y_2 = \frac{40}{9}, \quad \text{in} \quad y_3 = \frac{32}{9}$$

2. Aproksimiraj podatke

   $$\left[\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ y & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

   s polinomom druge stopnje in poišči najmanjšo vrednost tega polinoma.

   Rešitev: Polimom

   $$y = 1.25x^2 - 6.95x + 8.75$$

   Najmanjša vrednost je $y_{min} = -0.9105$

3. Poišči približno vrednost integrala

$$\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$$

s pomočjo enostavne Gaussove kvadraturne formule.

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx wf(\xi) + wf(1-\xi)$$

Parametra w in ξ določiš tako, da je formula točna za potenčne funkcije x^n, kjer je $n = 0,\ 1,\ 2$.

Rezultat primerjaj s točno rešitvijo.

Rešitev: Izpolnjeni morajo biti naslednji pogoji:

$$\int_0^1 x^n\,dx = w\xi^n + w(1-\xi)^n, \quad n = 0, 1, 2$$

Od tod dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 1 &= 2w, \quad n = 0 \\ \frac{1}{2} &= w\xi + w(1-\xi), \quad n = 1 \\ \frac{1}{3} &= w\xi^2 + w(1-\xi)^2, \quad n = 2 \end{aligned}$$

Prva in druga enačba sta odvisni. Iz prvih dveh enačb dobimo $w = \frac{1}{2}$ vstavimo v tretjo in dobimo

$$\frac{1}{3} = \xi^2 - \xi + \frac{1}{2} \tag{1}$$

$$0 = \xi^2 - \xi + \frac{1}{6} \tag{2}$$

$$\xi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \tag{3}$$

Točna vrednost $\frac{e-1}{2e} \approx 0.31606$.
Kvadraturna formula: 0.312754