Izpit iz Numeričnih metod

3. julij 2009

1. Reši numerično diferencialno enačbo

$$y' = -x\,y, \quad y(0) = 1$$

na dva načina.

(a) Eulerjeva metoda: $y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n, y_n)$

(b) Metoda srednje vrednosti:
$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$

Vzemi korak $h = 0.5$ naredi 3 korake po prvi in drugi metodi. Rezultate, ki jih dobiš primerjaj s točno rešitvijo. Katera metoda je boljša?
Rešitev:
Prva 1, 1, 0.75, 0.375, 0.09375, 0.
Druga 1, 0.888889, 0.622222, 0.339394, 0.141414, 0.043512
Tocna 1, 0.882497, 0.606531, 0.324652, 0.135335, 0.0439369

2. Reši sistem v smislu najmanjših kvadratov ($\|A\,X - B\|_2$ je minimalna).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rešitev: X=[7/3,-1/2]

3. Sestavite formulo za približno računanje integralov oblike:

$$\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x}} \approx \omega f(\xi)$$

kjer je $0 \leq \xi \leq 1$. Formula naj bo točna za konstanto in polinom prve stopnje. Po gornji formuli izračunaj približno vrednost integrala:

$$\int_0^1 \frac{(1 + x^2)\,dx}{\sqrt{x}}$$

in jo primerjaj s točno vrednostjo.
Rešitev:
Približne vrednost: 2.22222
Točne vrednosti: 12/5