Izpit iz Numeričnih metod

24. september 2009

1. Zapiši tri korake sekantne metode za reševanje enačbe $f(x) = 0$, kjer je
$$f(x) = x + (x^3 + 3)/2.$$
Izberi začetne vrednosti $x_0 = -3.0$ $x_1 = -2.0$.
Rešitev: Pri sekantni metodi je iteracija:
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$
Po treh korakih metode je $x_4 = -0.888$.

2. Izračunaj neskončno in prvo normo matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Rešitev: Neskončna norma matrike A, $\|A\|_\infty$, je maksimalna vrstična vsota absolutnih vrednosti:
$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$
Torej v našem primeru: $\|A\|_\infty = \max\{4, 4, 7\} = 7$.
Prva norma matrike A, $\|A\|_1$, je maksimalna stolpična vsota absolutnih vrednosti:
$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$
Torej v našem primeru: $\|A\|_1 = \max\{6, 6, 3\} = 6$.

3. Določi uteži formule za numerično odvajanje, oblike:
$$f'(x) = w_1 f(x - 2h) + w_2 f(x - h) + w_3 f(x)$$
tako, da bo točna za polinome stopnje manjše ali enake 2.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb, kjer vstavimo $f(x) = \{1,\ x,\ x^2\}$.

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= w_1(x-2h) + w_2(x-h) + w_3x \\ 2x &= w_1(x-2h)^2 + w_2(x-h)^2 + w_3x^2 \end{aligned}$$

Rešitev mora biti neodvisna od x. Vstavimo $x = 0$ in dobimo sistem:

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= -2w_1h - w_2h \\ 0 &= w_1 4h^2 + w_2h^2 \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $w_1 = \frac{1}{2h}$, $w_2 = -\frac{2}{h}$ in $w_3 = \frac{3}{2h}$. Torej:

$$f'(x) \approx \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h}$$