Izpit iz Numeričnih metod

24. junij 2010

(1) Zapiši tri korake sekantne metode za reševanje enačbe $f(x) = 0$, kjer je
$$f(x) = x + (x^3 + 3)/2.$$
Izberi začetne vrednosti $x_0 = -3.0$ $x_1 = -2.0$.

Rešitev: Pri sekantni metodi je iteracija:
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$
Po treh korakih metode je $x_4 = -1.0618$.

(2) Poišči približno rešitev diferencialne enačbe
$$y'(x) = -y(x), \quad y(0) = 1$$
v točki h, če uporabiš za reševanje Eulerjevo in CrankNicolsonovo metodo
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right).$$
Poišči točno rešitev. Točne rešitev je pozitivna, ko gre x v neskončnost, pa je enaka 0. Kakšen sme biti korak h, da ima to lastnost tudi približna rešitev.

Rešitev: Točna rešitev je e^{-x}. V prvem primeru velja $0 < (1 - h) < 1$, $0 < h < 1$ in v drugem pa $0 < \frac{1-h/2}{1+h/2} < 1$, $0 < h < 2$.

(3) Določi uteži formule za numerično odvajanje, oblike:
$$f'(x) = w_1 f(x - 2h) + w_2 f(x - h) + w_3 f(x)$$
tako, da bo točna za polinome stopnje manjše ali enake 2.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb, kjer vstavimo $f(x) = \{1,\ x,\ x^2\}$.
$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= w_1(x - 2h) + w_2(x - h) + w_3 x \\ 2x &= w_1(x - 2h)^2 + w_2(x - h)^2 + w_3 x^2 \end{aligned}$$
Rešitev mora biti neodvisna od x. Vstavimo $x = 0$ in dobimo sistem:
$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= -2w_1 h - w_2 h \\ 0 &= w_1 4h^2 + w_2 h^2 \end{aligned}$$
Od tod sledi, da je $w_1 = \frac{1}{2h}$, $w_2 = -\frac{2}{h}$ in $w_3 = \frac{3}{2h}$. Torej:
$$f'(x) \approx \frac{f(x - 2h) - 4f(x - h) + 3f(x)}{2h}$$