Izpit iz Numeričnih metod

17. februar 2012

(1) Poišči točno rešitev diferencialne enačbe. Glej pomoč.[1]

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{2}t\, y, \quad y(0) = 1.$$

Prepričaj se, da je rešitev definirana povsod, zavzame samo pozitivne vrednosti in teži k 0, ko gre $t \to \infty$. S pomočjo Eulerjeve metode s korakom $h = 1/2$, poišči približno rešitev te diferencialne enačbe. Rešitev, ki jo dobimo ni stalno pozitivna. Po katerem koraku, (za kateri n,) postane vrednost y_n prvič negativna?

(2) Prepričaj se, da je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna in jo razcepi po Choleskyju.

(3) Sestavi kvadraturno formulo za integrale oblike

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}\, dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(\xi)$$

tako, da bo točna za $f(x) = p_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2$.
Glej pomoč.[2] Izračunaj približno vrednost integralov:

(a) $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x+1}\, e^{-x}\, dx$ in

(b) $I_2 = \displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx$.

Točna vrednost prvega integrala je $I_1 = 1.37894$ medtem, ko je $I_2 = 0.886227$. Izračunaj relativno napako v obeh primerih. Poizkusi razložiti, zakaj je v prvem primeru napaka mnogo manjša, kot v drugem.

---

[1] Pomoč: enačba je z ločljivima spremenljivkama.

[2] Pomoč: $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx = 2$