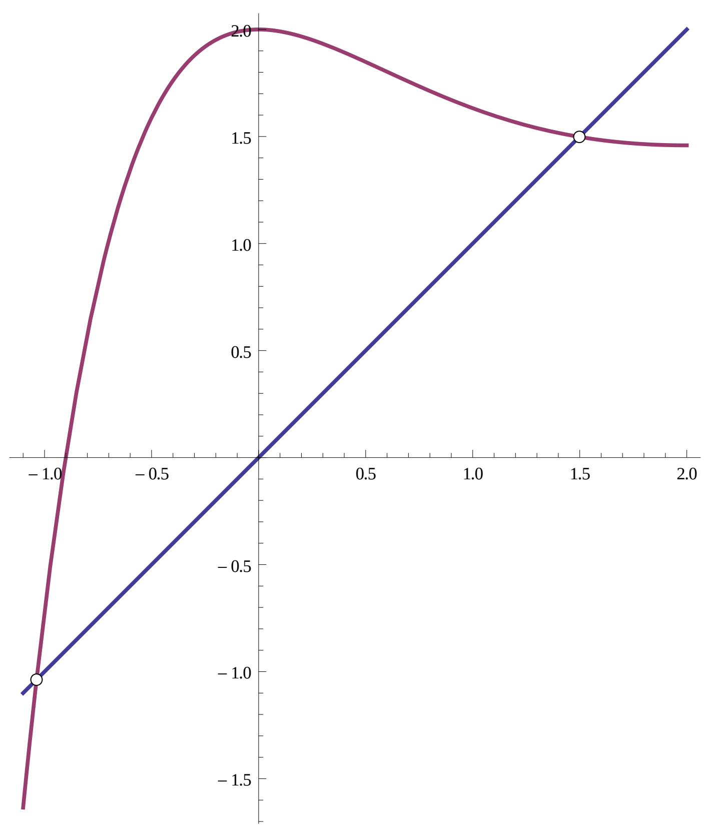
Izpit iz Numeričnih metod

27. junij 2012

1. Enačba
$$x = f(x), \quad f(x) = -x^2 e^{-x} + 2$$
ima dve rešitvi. S pomočjo Newtonove metode ju določi na dve decimalni mesti natančno. Ugotovi, katera je privlačna in katera je odbojna točka za iteracijo
$$x_{n+1} = f(x_n).$$



Rešitev:

$x_1 = -1.03746,\ x_2 = 1.49825, \quad f'(x_1) = 8.89302,\ f'(x_2) = -0.168031$

2. Določi kvadraturno formulo oblike

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx \approx w_0 f(0) + w_1 f(\xi).$$

Uteži $w_{1,2}$ in vrednost $\xi > 0$ določi tako, da bo formula točna za $f(x) = p_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, kjer je $p_0(x) = 1$ in $p_1(x) = x$ in $p_2(x) = x^2$. S pomočjo te kvadraturne formule določi približno vrednost integrala

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 + x^2}\, dx.$$

Rešitev:

$$w_0 = w_1 = \frac{1}{2}, \quad \xi = 2, \quad I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2 + 1} = 0.6$$

3. Določi, katerega od linearnih sistemov enačb $A_i\, x = b$, $i = 1, 2$ lahko rešiš s pomočjo Gauss-Siedlove iteracije. Vzemi začetni približek $x_0 = [0; 0]$ in zapiši tretjo iteracijo x_3.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Prvi sistem ni rešljiv, pri drugem, pa ima iteracijska matrika $S = [3/4, -1/2; 0, 0]$, lastni vrednosti enaki 0 in 3/4. V drugem primeru je $x_0 = [0, 0]$, $x_1 = [1, 2]$, $x_2 = [3/4, 2]$ in $x_3 = [9/16, 2]$. Točna rešitev je $[0, 2]$.