IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD
1. februar 2013

1. Podatke

x	1	2	3	4
y	1	3	2	3

aproksimirajte z linearno funkcijo $y = \alpha x + \beta$ po metodi najmanših kvadratov ter določite koeficienta α in β.

Rešitev: Iz podatkov dobimo predoločen sistem, ki ga zapišemo v matrični obliki

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}.$$

Rešitev po metodi najmanših kvadratov dobimo kot rešitev normalnega sistema

$$A^T\, A\, \mathbf{x} = A^T\, \mathbf{b}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (A^T\, A)^{-1}\, (A^T\, \mathbf{b}) \\ &= \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Koeficienta sta $\alpha = \frac{1}{2}$ in $\beta = 1$, premica je $y = \frac{1}{2}x + 1$.

2. Z uporabo modificirane Eulerjeve metode

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + h/2, y_n + hk_1/2), \\ y_{n+1} &= y_n + hk_2, \end{aligned}$$

rešite diferencialno enačbo

$$y' = -2y, \qquad y(0) = 1.$$

Interval $[0, 1]$ razdelite na $n = 4$ enako dolge podintervale ter poiščite numerično rešitev v točki $x = 1$.

Rešitev: Ker je desna stran enačbe $f(x, y) = -2y$, se modificirana Eulerjeva metoda poenostavi v

$$y_{n+1} = y_n - 2h\,(y_n - hy_n) = y_n\left(1 - 2h + 2h^2\right).$$

Korak je $h = \frac{1}{4}$, zato je $1 - 2h + 2h^2 = \frac{5}{8}$. Sledi:

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \tfrac{5}{8}, \quad y_2 = \tfrac{25}{64}, \quad y_3 = \tfrac{125}{512}, \quad y_4 = \tfrac{625}{4096}.$$

Numerična rešitev v točki $x = 1$ je $y_n = \frac{625}{4096} \approx 0.1526$, točna pa $y_t = \mathrm{e}^{-2} \approx 0.1353$.

3. Poiščite negibni točki funkcije $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}$ ter določite njun tip.

Rešitev: Iščemo rešitve enačbe $f(x) = x$. Problem je ekvivalenten iskanju ničel funkcije $g(x) = f(x) - x = 2x\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2} - x$. Le-te npr. poiščemo z uporabo Newtonove metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)},$$

kjer je odvod $g'(x) = 2\mathrm{e}^{-x}(1-x)-1$. Za začetna približka vzemimo npr. $x_0^1 = 0$ in $x_0^2 = 2$. Sledi:

$$x_0^1 = 0, \quad x_1^1 = -0.5, \quad x_2^1 = -0.33561, \quad x_3^1 = -0.29787, \quad x_4^1 = -0.29603$$

in

$$x_0^2 = 2, \quad x_1^2 = 1.24555, \quad x_2^2 = 1.22044, \quad x_3^2 = 1.22032.$$

Ker je $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x}(1-x)$ in $|f'(-0.29603)| = 3.48505 > 1$, je negibna točka $\hat{x}_1 = -0.29603$ odbojna, medtem ko je točka $\hat{x}_2 = 1.22032$ privlačna, saj je $|f'(1.22032)| = 0.130049 < 1$.