IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD
14. februar 2013

1. Določite utež in vozel kvadraturne formule

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x \approx \omega f(\xi),$$

kjer je $0 < \xi < 1$, da bo formula točna za $f(x) = 1$ in $f(x) = x$. Z uporabo te formule nato izračuanjte vrednost integrala

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} f(x) = 1 \quad &: \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{3x^{2/3}}{2}\Big|_0^1 = \frac{3}{2} = \omega \\ f(x) = x \quad &: \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{3x^{5/3}}{5}\Big|_0^1 = \frac{3}{5} = \omega\xi \end{aligned}$$

Sledi $\omega = \frac{3}{2}$ in $\xi = \frac{2}{5}$. Približna vrednost integrala je

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2/5} = 2.23774,$$

točna vrednost pa je 2.34359.

2. Dan je sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ali Jacobijeva iteracija konvergira? Odgovor utemeljite! Naredite dva koraka Jacobijeve iteracije z začetnim približkom $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Rešitev: Jacobijeva iteracija konvergira, saj je matrika A diagonalno dominantna. Točna rešitev je $x_\infty = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Matriko A razbijemo na $A = D - L - U$, Jacobijevo iteracijo pa izvajamo po formuli

$$x_{n+1} = R_J x_n + c_J,$$

kjer je

$$R_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/4 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

in

$$c_J = D^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$\begin{aligned} x_1 &= R_J \cdot x_0 + c_J = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ x_2 &= R_J \cdot x_1 + c_J = \begin{bmatrix} 1 \\ 13/12 \\ 11/12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Dani sta krožnici
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{in} \quad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$
Z uporabo Newtonove iteracijske sheme za sisteme naredite dva koraka metode z začetnim približkom $[x_0, y_0] = [1, 1]$.

Rešitev: Newtonova iteracijska shema za reševanje sistema $f(x,y) = 0$ in $g(x,y) = 0$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_x(x_n, y_n) & f_y(x_n, y_n) \\ g_x(x_n, y_n) & g_y(x_n, y_n) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{bmatrix}.$$

Parcialni odvodi: $f_x = 2x$, $f_y = 2y$, $g_x = 2(x-1)$ in $g_y = 2y$. Sledi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 7/8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Točna rešitev je $[x, y] = [1/2, \sqrt{3}/2]$.