IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD
12. september 2013

1. Dane so tri točke v ravnini

$$A(-2,1), B(1,-1) \text{ in } C(3,2).$$

Skozi te tri točke interpolirajte polinom druge stopnje. Z Newtonovo metodo določite teme tako dobljene parabole.

Rešitev: Vse tri točke vstavimo v enačbo parabole $y = ax^2 + bx + c$ in dobimo sistem

$$\begin{aligned} 1 &= 4a - 2b + c, \\ -1 &= a + b + c, \\ 2 &= 9a + 3b + c, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $a = \frac{13}{30}$, $b = -\frac{7}{30}$ in $c = -\frac{6}{5}$. Torej je enačba parabole $y = \frac{13}{30}x^2 - \frac{7}{30}x - \frac{6}{5}$. Teme dobimo tam, kjer je $y' = \frac{13}{15}x - \frac{7}{30} = 0$. Za Newtonovo metodo potrebujemo še drugi odvod $y'' = \frac{13}{15}$ in primerno izbran začetni približek, npr. $x_0 = 0$. Rešitev dobimo že po prvem koraku

$$x_1 = x_0 - \frac{y'(x_0)}{y''(x_0)} = \frac{7}{26}.$$

Teme je v točki $T(\frac{7}{26}, -\frac{1921}{1560})$.

2. Dan je sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ali Gauss-Seidlova iteracija konvergira? Odgovor utemeljite! Naredite tri korake Gauss-Seidlove iteracije z začetnim približkom $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Rešitev: Gauss-Seidlova iteracija konvergira, saj je matrika A diagonalno dominantna. Točna rešitev je $x_\infty = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Matriko A razbijemo na $A = D - L - U$, Gauss-Seidlovo iteracijo pa izvajamo po formuli

$$x_{n+1} = R_{gs}x_n + c_{gs},$$

kjer je

$$R_{gs} = (D-L)^{-1}U = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

in

$$c_{gs} = (D-L)^{-1}b = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 5/6 \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$\begin{aligned} x_1 &= R_{gs} \cdot x_0 + c_{gs} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 5/6 \end{bmatrix}, \\ x_2 &= R_{gs} \cdot x_1 + c_{gs} = \begin{bmatrix} 35/18 \\ 35/36 \end{bmatrix}, \\ x_3 &= R_{gs} \cdot x_2 + c_{gs} = \begin{bmatrix} 2 \\ 215/216 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Določite uteži kvadraturne formule

$$\int_0^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \approx \omega_1 f(\tfrac{1}{4}) + \omega_2 f(1),$$

da bo formula točna za $f(x) = 1$ in $f(x) = x$. Z uporabo te formule nato izračuanjte vrednost integrala

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} f(x) = 1 \quad &: \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2x^{1/2}\Big|_0^2 = 2\sqrt{2} = \omega_1 + \omega_2 \\ f(x) = x \quad &: \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2x^{3/2}}{3}\Big|_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{4}\omega_1 + \omega_2 \end{aligned}$$

Sledi $\omega_1 = \frac{8\sqrt{2}}{9}$ in $\omega_2 = \frac{10\sqrt{2}}{9}$. Približna vrednost integrala je

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{8\sqrt{2}}{9}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}} + \frac{10\sqrt{2}}{9}\mathrm{e} = 5.8855,$$

točna vrednost pa je 6.6877.