IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD
22. januar 2014

1. Dani sta dve točki v ravnini
$$A(-2,1) \text{ in } B(1,-1).$$
Določite koeficienta a_1 in a_2 tako, da bosta točki A in B ležali na grafu funkcije
$$f(x) = a_1 \mathrm{e}^x + a_2 \mathrm{e}^{2x}.$$
Graf funkcije $f(x)$ seka abscisno os v natanko eni točki. S pomočjo Newtonove metode poišči približno vrednost abscise te točke na dve decimalni mesti natačno.
Rešitev: $f(x) = 7.79549\mathrm{e}^x - 3.00313\mathrm{e}^{2x}$, $x_0 = 0.953888$

2. Dan je sistem $Ax = b$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Ali Gauss-Seidlova iteracija konvergira? Odgovor utemeljite!
Naredite tri korake Gauss-Seidlove iteracije z začetnim približkom $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
Rešitev: Lastni vrednosti iteracijske matrike `S=tril(A)^(-1)*triu(A,1)` sta $-4/5$ in 0. Obe sta absolutno manj kot 1 torej iteracija konvergira. Tretji korak je `[61/5, 244/25]`. Točna rešitev je `[25,20]`.

3. Določite uteži ω_1, ω_2 in parameter h kvadraturne formule
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \omega_1 f(\tfrac{1}{2} - h) + \omega_2 f(\tfrac{1}{2} + h),$$
da bo formula točna za $f(x) = 1, x,$ in x^2. Uporabi dobljeno formulo za izračun približne vrednosti integrala in jo primerjaj s točno vrednostjo.
$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$
Ugotovi ali formula točno izračuna tudi integrale, kjer je funkcija $f(x)$ polinom tretje stopnje.
Rešitev Po formuli je $I \approx 2.00702$ točna vrednost $I = 2$. Uteži $w1 = w2 = 1/2$ in $h = 1/(2\sqrt{3})$. Formula je točna tudi za polinome tretje stopnje.