IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD
6. junij 2014

1. Zapišite tri korake sekantne metode za enačbo
$$x + \frac{x^3+3}{2} = 0,$$
kjer za začetna približka vzamete $x_0 = 1$ in $x_1 = 3$.

Rešitev: Korak sekantne metode je
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$
kjer je $f(x) = x + \frac{x^3+3}{2}$. Dobimo
$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 0.6, \\
x_3 &= x_2 - f(x_2) \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = 0.26444, \\
x_4 &= x_3 - f(x_3) \cdot \frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} = -1.10595.
\end{aligned}$$

2. Dan je sistem $Ax = b$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}.$$
Ali Jacobijeva iteracija konvergira? Odgovor utemeljite! Naredite dva koraka Jacobijeve iteracije z začetnim približkom $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Rešitev: Jacobijeva iteracija konvergira, saj je matrika A diagonalno dominantna. Točna rešitev je $x_\infty = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Matriko A razbijemo na $A = D - L - U$, Jacobijevo iteracijo pa izvajamo po formuli
$$x_{n+1} = R_J x_n + c_J,$$
kjer je
$$R_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/4 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$
in
$$c_J = D^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 2 \\ 4/3 \end{bmatrix}.$$
Sledi
$$\begin{aligned}
x_1 &= R_J \cdot x_0 + c_J = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 2 \\ 4/3 \end{bmatrix}, \\
x_2 &= R_J \cdot x_1 + c_J = \begin{bmatrix} 11/12 \\ 85/36 \\ 3/4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Z uporabo modificirane Eulerjeve metode

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + h/2, y_n + hk_1/2), \\ y_{n+1} &= y_n + hk_2, \end{aligned}$$

rešite diferencialno enačbo

$$y' = -2y, \qquad y(0) = 2.$$

Interval $[0, 1]$ razdelite na $n = 4$ enako dolge podintervale ter poiščite numerično rešitev v točki $x = 1$.

Rešitev: Ker je desna stran enačbe $f(x, y) = -2y$, se modificirana Eulerjeva metoda poenostavi v

$$y_{n+1} = y_n - 2h\,(y_n - hy_n) = y_n\left(1 - 2h + 2h^2\right).$$

Korak je $h = \frac{1}{4}$, zato je $1 - 2h + 2h^2 = \frac{5}{8}$. Sledi:

$$y_0 = 2, \quad y_1 = \tfrac{5}{4}, \quad y_2 = \tfrac{25}{32}, \quad y_3 = \tfrac{125}{256}, \quad y_4 = \tfrac{625}{2048}.$$

Numerična rešitev v točki $x = 1$ je $y_n = \frac{625}{2048} \approx 0.3052$, točna pa $y_t = 2\mathrm{e}^{-2} \approx 0.2707$.