Rešene izpitne naloge iz numeričnih metod 2000-2007

1 Iterativno reševanje nelinearnih enačb

1. Poišči rešitev enačbe $x = f(x)$, kjer je

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x^3 + 3),$$

s pomočjo Newtonove iteracije. Izberi začetni približek $x_0 = 1$. Ali lahko dobimo to rešitev tudi s pomočjo iteracije

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{1}$$

s primerno izbranim začetnim približkom?

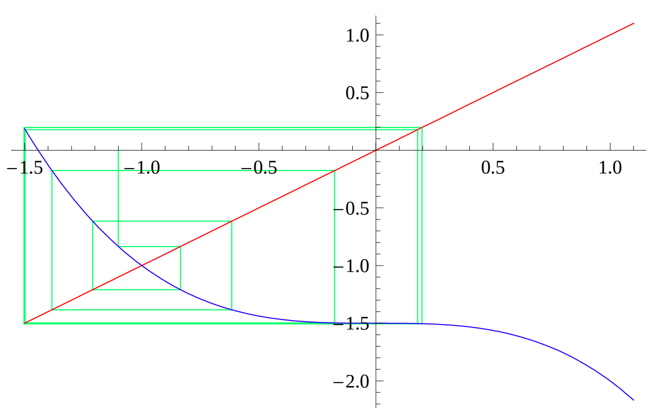
Rešitev: Newtonova iteracija za enačbo $f(x) - x = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - x_n}{f'(x_n) - 1}$$

Izberimo začetni približek $x_0 = 1$ in dobimo:

$$\begin{pmatrix} x_n : & 1.000 & -2.000 & -1.423 & -1.085 & -1.004 & -1.000 \end{pmatrix}$$

Gornja iteracija (1) ne konvergira k $x = -1$, ker je $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2$ v točki $x = -1$ enak $-\frac{3}{2}$, ki je po absolutni vrednosti več kot ena. Točka $x = -1$ je odbojna.



Slika 1: Točka $x = -1$ je odbojna.

2. Na intervalu $[0,1]$ ima enačba $f(x)=x$, kjer je

$$f(x)=3\sqrt{x}e^{-x}-\frac{1}{3},$$

dve rešitvi. Katero od teh dveh rešitev je mogoče poiskati s pomočjo iteracije

$$x_{n+1}=f(x_n), \quad x_{n+1}=3\sqrt{x_n}e^{-x_n}-\frac{1}{3} \tag{2}$$

s primerno izbranim začetnim približkom x_0?

Rešitev: Najprej s pomočjo Newtonove iteracije poiščemo rešitvi enačbe $f(x)=x$.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)-x_n}{f'(x_n)-1}$$

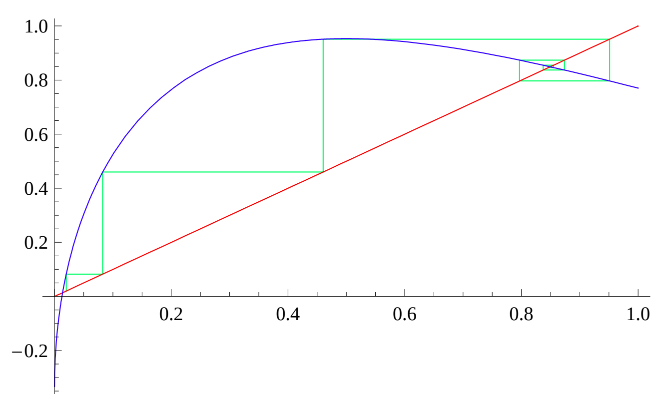
Izberimo začetna približka $x_0=\{0.02, 1.0\}$:

$$\begin{pmatrix} 0.02 & 1.0 \\ 0.0130373 & 0.851983 \\ 0.013748 & 0.84922 \\ 0.0137594 & 0.849218 \end{pmatrix}$$

Poiščemo absolutno vrednost odvoda iteracijske funkcije (2):

$$f'(\{0.0137594, 0.849218\})=\{12.2658, -0.486293\}$$

Prva točka je odbojna, druga pa privlačna.



Slika 2: Prva točka je odbojna, druga pa privlačna.

3. Na intervalu $[0,2]$ ima enačba $f(x)=0$, kjer je

$$f(x)=\sqrt{x}e^{-x}-\frac{1}{3},$$

dve rešitvi. Katero od teh dveh rešitev je mogoče poiskati s pomočjo iteracije

$$x_{n+1} = f(x_n) + x_n, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n}e^{-x_n} - \frac{1}{3} + x_n \tag{3}$$

s primerno izbranim začetnim približkom x_0?

Rešitev: Najprej s pomočjo Newtonove iteracije poiščemo rešitvi enačbe $f(x) = 0$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

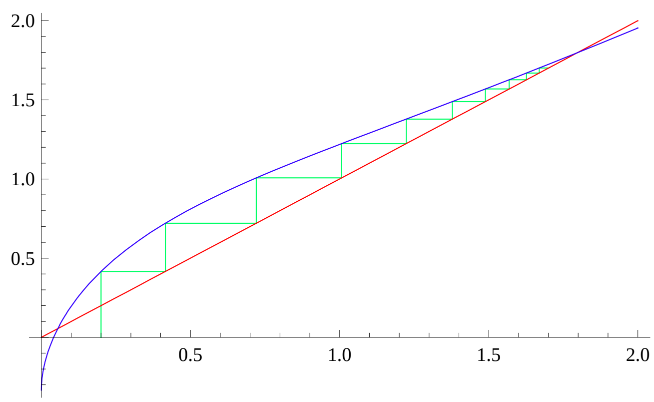
Izberimo začetna približka $x_0 = \{0.02, 1.0\}$:

$$\begin{pmatrix} 0.02 & 1. \\ 0.04513 & 1.7919 \\ 0.05449 & 1.7972 \\ 0.05514 & 1.7972 \end{pmatrix}$$

Poiščemo absolutno vrednost odvoda iteracijske funkcije (3):

$$f'(\{0.05514, 1.7972\}) = \{2.6893, -0.2406\}$$

Prva točka je odbojna, druga pa privlačna.



Slika 3: Prva točka je odbojna, druga pa privlačna.

4. S pomočjo Newtonove iteracije določi vrednost $\sqrt[3]{2}$ na tri decimalna mesta natančno.

   Rešitev: Rešimo enačbo $x^3 - 2 = 0$ s pomočjo Newtonove metode. Začetni približek bomo vzeli $x_0 = 1$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2}$$

$$\begin{pmatrix} x_n: & 1. & 1.333 & 1.264 & 1.260 \end{pmatrix}$$

5. Zapiši tri korake sekantne metode za reševanje enačbe $f(x) = 0$, kjer je

$$f(x) = x + (x^3 + 3)/2.$$

Izberi začetne vrednosti $x_0 = -3.0$ $x_1 = -2.0$.

Rešitev: Pri sekantni metodi je iteracija:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Po treh korakih metode je $x_4 = -0.888$.

6. Rešujemo enačbo $x = bx(1-x)$ za različne vrednosti parametra b. V kakšnih mejah se mora gibati parameter b, da iteracija

$$x_{n+1} = bx_n(1 - x_n) \tag{4}$$

s primerno izbiro začetnega približka, konvergira k pozitivni rešitvi enačbe.

Rešitev: Rešitev enačbe, ki je različna od nič, je $x = \frac{(b-1)}{b}$. Od tod sledi, da je $b > 1$, če je ta rešitev pozitivna. Točka je privlačna za iteracijo (4), če je odvod desne strani po absolutni vrednosti manj kot ena v tej točki.

$$b(1-2x) = 2 - b, \quad \text{za} \quad x = \frac{(b-1)}{b}$$

Od tod sledi, da mora biti $b \in (1, 3)$.

7. Pokažite, da leži na intervalu $I = [0.1, 1]$ natanko en koren enačbe

$$x + \log x = 0.$$

Poišči ta koren z Newtonovo metodo.
Naslednje tri funkcije

$$f(x) = -\log x, \quad f(x) = e^{-x}, \quad f(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x})$$

imajo natanko eno fiksno točko $x = f(x)$ na intervalu I, ki se ujema z rešitvijo zgornje enačbe. V katerih primerih je ta točka privlačna in v katerih odbojna. Z drugimi besedami, v katerih primerih lahko poiščemo začetni približek, različen od fiksne točke, tako da iteracija konvergira k fiksni točki in kdaj to ni mogoče?

$$x_{k+1} = -\log x_k, \quad x_{k+1} = e^{-x_k}, \quad x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + e^{-x_k})$$

Rešitev: $x = 0.56714$,

$$f'(x) = -1/x, \quad -e^{-x}, \quad \text{in} \quad \frac{1}{2}(1 - e^{-x})$$

Vrednosti odvodov funkcij $f(x)$ v negibni točki so

$$-1.76291, -0.567086, 0.216457$$

Prva je odbojna, ker je odvod po absolutni vrednosti večji od 1, drugi dve pa sta privlačni.

2 Sistemi linearnih enačb

2.1 Določeni sistemi

1. Položi parabolo skozi točke $T_1(1,1)$ $T_2(2,2)$ in $T_3(-2,1)$.

   Rešitev: Rešujemo sistem

   $$y_i = ax_i^2 + bx_i + c, \quad i = 1,2,3.$$

   Neznanke so a, b in c. Sistem zapišemo v matrični obliki takole:

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Rešitev tega sistema je $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$ in $c = \frac{1}{2}$.
   Parabola, ki poteka skozi te tri točke je podana z enačbo:

   $$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

2. Pokaži, da je matrika sistema $Ax = b$ pozitivno definitna in reši sistem s pomočjo razcepa Choleskega.

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Rešitev: Matrika A pozitivno definitna, če so vsi glavni minorji matrike pozitivni. Glavna minorja sta:

   $$2 \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4,$$

   ki sta oba pozitivna.
   Razcepimo matriko $A = R^T R$, kjer je R zgornjetrikotna matrika.

   $$\begin{bmatrix} \alpha & a^T \\ a & A_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ r & R_*^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & r^T \\ 0 & R_* \end{bmatrix}$$

   Od tod sledi:

   $$\begin{aligned} \alpha = \rho^2 \quad &\Rightarrow \quad \rho = \sqrt{\alpha} \\ a^T = \rho r^T \quad &\Rightarrow \quad r^T = a^T/\rho \\ A_* = R_*^T R_* + rr^T \quad &\Rightarrow \quad R_*^T R_* = A_* - rr^T \end{aligned}$$

   V našem primeru je

   $$\begin{aligned} \alpha = 2 \quad &\Rightarrow \quad \rho = \sqrt{2} \\ a^T = 1 \quad &\Rightarrow \quad r^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ A_* = 3 \quad &\Rightarrow \quad R_*^T R_* = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \quad R_* = \sqrt{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix}$$

Rešimo sistem

$$R^T R x = b, \quad Rx = y, \quad R^T y = b$$

Oba sistema sta trikotna, zato jih rešimo z vstavljanjem.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix} x$$

Od tod sledi, da je

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

3. Izračunaj neskončno in prvo normo matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Neskončna norma matrike A, $\|A\|_\infty$, je maksimalna vrstična vsota absolutnih vrednosti:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Torej v našem primeru: $\|A\|_\infty = \max\{4, 4, 7\} = 7$.
Prva norma matrike A, $\|A\|_1$, je maksimalna stolpična vsota absolutnih vrednosti:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Torej v našem primeru: $\|A\|_1 = \max\{6, 6, 3\} = 6$.

4. Pokaži, da lahko sistem $Ax = b$ rešimo s pomočjo Jacobijeve iteracijske metode in zapiši tretjo iteracijo. Začetni približek je enak 0.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Napravimo razcep matrike po Jacobiju:

$$A = D - N, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Iteracijska matrika S je enaka

$$S = D^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Lastne vrednosti iteracijske matrike so:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2} = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Lastni vrednosti sta po absolutni vrednosti manj kot 1, zato je Jacobijeva iteracija konvergentna.

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x_n$$

Tretja iteracija, če izberemo začetni približek 0, in točna rešitev sta enaki

$$x_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Pokaži, da lahko sistem $Ax = b$ rešimo s pomočjo Gauss-Seidlove iteracijske metode. Zapiši točno rešitev in tretjo iteracijo. Začetni približek je enak 0.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Napravimo razcep matrike po Gauss-Seidlu:

$$A = M - N, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iteracijska matrika S je enaka

$$S = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Lastne vrednosti iteracijske matrike so:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - \frac{1}{2}) = 0, \quad \lambda_1 = 0 \quad \text{in} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Lastni vrednosti sta po absolutni vrednosti manj kot 1, zato je Gauss-Seidlova iteracija konvergentna.

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x_n$$

Tretja iteracija, če izberemo začetni približek 0, in točna rešitev sta enaki:

$$x_3 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 7/8 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Pokaži, da lahko sistem $Ax = b$ rešimo s pomočjo Jacobijeve iteracijske metode. Zapiši točno rešitev in tretjo iteracijo. Začetni približek je enak 0.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Matrika sistema je diagonalno dominantna, zato Jacobijeva iteracija konvergira. Zapišimo Jacobijevo iteracijo po komponentah:

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \frac{1}{4}(1 - x_2^{(n)} - x_3^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} &= \frac{1}{3}(1 - x_1^{(n)} - x_3^{(n)}) \\ x_3^{(n+1)} &= \frac{1}{2}(1 - x_1^{(n)}) \end{aligned}$$

Tretja iteracija in točna rešitev sta enaki:

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0.1354 \\ 0.1944 \\ 0.4792 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.15 \\ 0.45 \end{bmatrix}$$

7. Pokaži, da lahko sistem $Ax = b$ rešimo s pomočjo Gauss-Seidlove iteracijske metode. Zapiši točno rešitev in tretjo iteracijo. Začetno približek je enak 0.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Matrika sistema je diagonalno dominantna, zato Gauss-Seidlova iteracija konvergira. Zapišimo Gauss-Seidlovo iteracijo po komponentah

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \frac{1}{4}(1 - x_2^{(n)} - x_3^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} &= \frac{1}{3}(1 - x_1^{(n+1)} + x_3^{(n)}) \\ x_3^{(n+1)} &= \frac{1}{2}(1 - x_1^{(n+1)}) \end{aligned}$$

Tretja iteracija in točna rešitev sta enaki:

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0.0924 \\ 0.1515 \\ 0.4538 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.15 \\ 0.45 \end{bmatrix}$$

8. Ali lahko rešimo sistem $Ax = b$ z Gauss-Seidlovo iteracijo?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Izračunaj prve tri korake iteracije. Začetni približek izberi $x_0 = [0,0,0]^T$. Kdaj bi se lahko zgodilo, da nas iteracijska metoda pripelje do rešitve v končno korakih?

Rešitev: Gauss-Seidlova iteracija je konvergentna, ker ima matrika

$$S = -M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

samo ničelne lastne vrednosti.

Ker je matrika S zgornjetrikotna z diagonalo enako nič, je njena tretja potenca identično enaka nič. Zato se tretja iteracija ujema s točno rešitvijo: $x_3 = [0, 1/2, 1]^T$ in $x_\infty = [0, 1/2, 1]^T$.

2.2 Predoločeni sistemi

1. Poišči vektor x, ki minimizira evklidsko normo $\|Ax - b\|_2$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Iskani vektor x je rešitev enačbe

$$A^T A x = A^T b, \quad x = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Sistem ima enolično rešitev, če je matrika A polnega ranga. V tem primeru to pomeni, da so stolpci linearno neodvisni, torej mora biti rang enak 2. V našem primeru to velja.
Ker je

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

je

$$x = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2. Aproksimiraj podatke P z linearno funkcijo $f(x) = a_1 x + a_2$.

$$P = \begin{bmatrix} x_n: & 1 & 2 & 3 \\ y_n: & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Rešitev:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev, ki minimizira normo $\|Aa-b\|_2$, dobimo takole:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Linearna funkcija, ki aproksimira podatke P, je $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$.

3. Aproksimiraj tabelo podatkov P s funkcijo $f(x) = a_1 e^{a_2 x}$, tako da uvedeš nove spremenljivke, za katere postane problem linearen.

$$P = \begin{bmatrix} x_n: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ y_n: & 1.14 & 0.89 & 0.71 & 0.67 & 0.64 & 0.48 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Uvedba novih spremenljivk:

$$y = a_1 e^{a_2 x}, \quad \log y = \log a_1 + a_2 x$$

Označimo

$$Y = \log y \quad \text{in} \quad X = x$$

in aproksimiramo tabelo

$$P' = \begin{bmatrix} X_n: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ Y_n: & 0.13 & -0.12 & -0.34 & -0.4 & -0.45 & -0.73 \end{bmatrix}$$

z linearno funkcijo $Y = a'_1 X + a'_2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.13 \\ -0.12 \\ -0.34 \\ -0.4 \\ -0.45 \\ -0.73 \end{bmatrix}, \quad a' = (A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{bmatrix} -0.15 \\ 0.07 \end{bmatrix}.$$

Od tod sledi:

$$a_1 = e^{a'_2} = 1.07 \quad \text{in} \quad a_2 = a'_1 = -0.15.$$

4. Aproksimiraj podatke

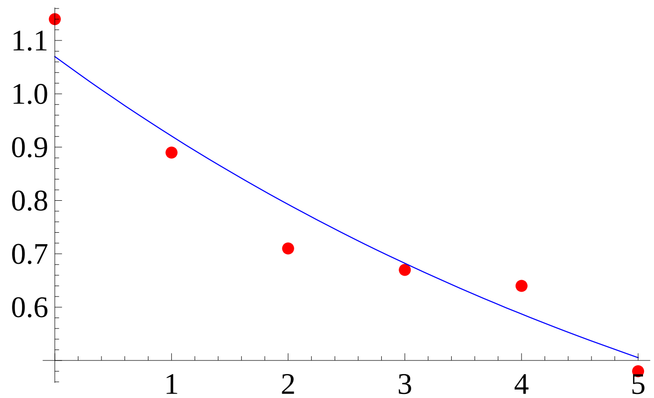
$$\left[\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ y & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

s polinomom druge stopnje in poišči najmanjšo vrednost tega polinoma.

Rešitev: Polimom

$$y = 1.25x^2 - 6.95x + 8.75$$

Najmanjša vrednost je $y_{min} = -0.9105$.



Slika 4: Podatki in graf funkcije $f(x) = 1.07\, e^{-0.15x}$

2.3 Nedoločeni sistemi

1. Poišči točko ravnine

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5,$$

ki je najbliže koordinatnemu izhodišču.

Rešitev: Rešujemo sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = 5 \quad \text{in} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T. \tag{5}$$

Sistem ima neskončno rešitev. Iščemo tisto, katere druga norma $\|x\|_2$ je najmanjša. Če je matrika A polnega ranga, kar v tem primeru pomeni, da so vrstice linearno neodvisne, potem obstaja enolična rešitev problema. Pišemo:

$$x = A^T y, \quad AA^T y = b, \quad y = (AA^T)^{-1} b, \quad x = A^T (AA^T)^{-1} b$$

Rešitev z minimalno normo x sistema (5) zapišemo takole:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right)^{-1} 5 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2. Poišči rešitev sistema $Ax = b$ z najmanjšo evklidsko normo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Kot v prejšnji nalogi dobimo:

$$x = A^T (AA^T)^{-1} b$$

Ker je

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

je

$$(AA^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Rešitev x izrazimo

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

3 Numerično odvajanje in integriranje

3.1 Numerično odvajanje in interpolacija

1. Funkcija je podana tabelarično:

x	2	2.5	4
$f(x)$	0.5	0.4	0.25

S pomočjo kvadratne interpolacije izračunaj $f(3)$.

Rešitev: Funkcijo interpoliramo s kvadratno parabolo $f(x) \approx ax^2 + bx + c$. Ko vstavimo v funkcijo podatke iz tabele, dobimo sistem enačb za koeficiente:

$$\begin{aligned} 0.5 &= 4a + 2b + c \\ 0.4 &= 6.25a + 2.5b + c \\ 0.25 &= 16a + 4b + c \end{aligned}$$

Sistem ima rešitev $a = -0.05$, $b = 0.425$ in $c = -0.15$.
Torej je

$$f(x) = -0.05x^2 + 0.425x - 0.15$$

in zato je $f(3) = 0.675$.

2. Z uporabo deljenih razlik izračunajte $f(8.2)$, če je funkcija $f(x)$ podana tabelarično:

$$P = \begin{bmatrix} i: & 0 & 1 & 2 \\ x_i: & 8.0 & 8.1 & 8.3 \\ y_i: & 16.0 & 17.6 & 17.5 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Zapišemo tabelo deljenih razlik

$$D = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & & \\ x_1 & y_1 & y_{0,1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} & \\ x_2 & y_2 & y_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & y_{0,1,2} = \frac{f_{1,2} - f_{0,1}}{x_2 - x_0} \end{bmatrix}$$

Vrednost v točki x izračunamo s pomočjo polinoma:

$$p(x) = y_0 + y_{0,1}(x - x_0) + y_{0,1,2}(x - x_0)(x - x_1)$$

V našem primeru je

$$D = \begin{bmatrix} 8.0 & 16.0 & & \\ 8.1 & 17.6 & 16.0 & \\ 8.3 & 17.5 & -0.5 & -55.0 \end{bmatrix}$$

$$p(8.2) = 16.0 + 16.0(8.2 - 8.0) - 55.0(8.2 - 8.0)(8.2 - 8.1) = 18.1$$

3. Določi uteži formule za numerično odvajanje, oblike:

$$f'(x) \approx w_1 f(x - h) + w_2 f(x) + w_3 f(x + h)$$

tako, da bo točna za polinome stopnje manjše ali enake 2.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb, kjer vstavimo $f(x) = \{1,\ x,\ x^2\}$.

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= w_1(x - h) + w_2 x + w_3(x + h) \\ 2x &= w_1(x - h)^2 + w_2 x^2 + w_3(x + h)^2 \end{aligned}$$

Rešitev mora biti neodvisna od x, x se okrajša. Sistem, po krajšanju x:

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= -w_1 h + w_3 h \\ 0 &= w_1 h^2 + w_3 h^2 \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $w_1 = -\frac{1}{2h}$, $w_2 = 0$ in $w_3 = \frac{1}{2h}$. Torej:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

4. Določi uteži formule za numerično odvajanje, oblike:

$$f'(x) = w_1 f(x - 2h) + w_2 f(x - h) + w_3 f(x)$$

tako, da bo točna za polinome stopnje manjše ali enake 2.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb, kjer vstavimo $f(x) = \{1,\ x,\ x^2\}$.

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= w_1(x - 2h) + w_2(x - h) + w_3 x \\ 2x &= w_1(x - 2h)^2 + w_2(x - h)^2 + w_3 x^2 \end{aligned}$$

Rešitev mora biti neodvisna od x, x se okrajša. Sistem, po krajšanju x:

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + w_2 + w_3 \\ 1 &= -2w_1 h - w_2 h \\ 0 &= w_1 4h^2 + w_2 h^2 \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $w_1 = \frac{1}{2h}$, $w_2 = -\frac{2}{h}$ in $w_3 = \frac{3}{2h}$. Torej:

$$f'(x) \approx \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h}$$

3.2 Numerično integriranje

1. Izračunaj integral

$$I = \int_{-1}^{2} x^3 e^x \, dx$$

s pomočjo trapezne, Simpsonove in triosminske formule ($n = 6$). Rezultate primerjajte s točno rešitvijo.

Rešitev: Ker je $n = 6$, $a = -1$ in $b = 2$, je $h = \frac{1}{2}$, vozli pa so v točkah $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.
Trapezna formula se glasi:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(a+h) + \cdots 2f(b-h) + f(b)\right)$$

Približna vrednost integrala po tej formuli je $I = 23.6733$.
Simpsonova formula se glasi:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx \quad &\approx \quad \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots \\ &\qquad +2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)\Big)\end{aligned}$$

Približna vrednost integrala po tej formuli je $I = 20.8675$.
Triosminska formula se glasi:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx \quad &\approx \quad \frac{3h}{8}\Big(f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + 2f(a+3h) + \cdots \\ &\qquad +2f(b-3h) + 3f(b-2h) + 3f(b-h) + f(b)\Big)\end{aligned}$$

Približna vrednost integrala po tej formuli je $I = 21.0865$.
Točna vrednost integrala je $I = 20.6642$.

2. Konstruiraj kvadraturno formulo

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx A_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + A_1 f(0) + A_2 f\left(\frac{1}{2}\right),$$

ki je točna za polinome reda ≤ 2. S pomočjo te formule izračunaj še vrednost integrala

$$\int_{-1}^{1} x e^x \, dx$$

in jo primerjaj s točno vrednostjo.

Rešitev: Najprej določimo koeficiente kvadraturne formule tako, da bo le-ta točna za $f(x) = 1, x, x^2$.

$$
\begin{aligned}
f(x) = 1 \quad &: \quad \int_{-1}^{1} dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2 = A_0 + A_1 + A_2 \\
f(x) = x \quad &: \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0 = -\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_2 \\
f(x) = x^2 \quad &: \quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} = \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{4}A_2
\end{aligned}
$$

Rešitev tega sistema je $A_0 = A_2 = \frac{4}{3}$, $A_1 = -\frac{2}{3}$.
Kvadraturna formula se torej glasi:

$$I(f) = \frac{4}{3}f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Izračunajmo integral po kvadraturni formuli:

$$\int_{-1}^{1} xe^x\,dx = \frac{2}{3}\left(e^{1/2} - e^{-1/2}\right) = 0.6948.$$

Točna vrednost: $I = 0.7358$.

3. Sestavi enostavno kvadraturno formulo oblike

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}f(\xi_1) + \frac{1}{2}f(\xi_2).$$

Vozlišči ξ_1 in ξ_2 izbereš tako, da je formula točna za $f(x) = 1$, x in x^2. S pomočjo dobljene formule izračunaj približno vrednost integrala

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$$

in jo primerjaj s točno rešitvijo.

Rešitev: Za $f(x) = 1$ je pogoj na prazno izpolnjen. Zapišimo sistem za x in x^2.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \quad &= \quad \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \\
\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \quad &= \quad \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)
\end{aligned}
$$

Rešitev sistema je

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$$

Od tod je:

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx \approx 0.616191$$

Točna rešitev je $\frac{2}{\pi} \approx 0.63662$.

4. Sestavi enostavno kvadraturno formulo oblike

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx wf(\xi_1) + wf(\xi_2).$$

Utež w in vozlišči ξ_1 in ξ_2 izbereš tako, da je formula točna za $f(x) = 1$, x, in x^2. S pomočjo dobljene formule izračunaj približno vrednost integrala

$$\int_{-1}^{1} e^x \, dx$$

in jo primerjaj s točno rešitvijo.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} dx = 2 &= 2w \\ \int_{-1}^{1} x \, dx = 0 &= w\xi_1 + w\xi_2 \\ \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{2}{3} &= w\xi_1^2 + w\xi_2^2 \end{aligned}$$

Iz gornjega sledi, da je $w = 1$ in $\xi_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Od tod je:

$$\int_{-1}^{1} e^x \, dx \approx e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} + e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2.3427$$

Točna rešitev je $e - 1/e \approx 2.3504$.

5. Sestavi enostavno kvadraturno formulo oblike

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx wf(\xi)$$

Utež w in vozlišče ξ izbereš tako, da je formula točna za $f(x) = 1$ in x. S pomočjo dobljene formule izračunaj približno vrednost integrala

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

in jo primerjaj z rešitvijo, natančno na štiri decimalna mesta, ki jo dobiš s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} dx = 2 &= w \\ \int_{-1}^{1} x \, dx = 0 &= w\xi \end{aligned}$$

Iz gornjega sledi, da je $w = 2$ in $\xi = 0$. Od tod je:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx \approx 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 2$$

Razvijemo funkcijo $\sin x$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke 0 in dobimo

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

Integriramo po x v mejah od -1 do 1 in dobimo

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \dots = 2 - \frac{2}{3\cdot 3!} + \frac{2}{5\cdot 5!} - \dots$$

Če želimo, da se delna vsota n členov razlikuje od točne vrednosti za manj kot 10^{-4}, mora biti absolutna vrednost $(n+1)$-vega člena manj kot 10^{-4}. Takšno oceno napake lahko naredimo zato, ker je vrsta alternirajoča.
Iz $\frac{2}{(2n-1)(2n-1)!} < 10^{-4}$ sledi, da je $n > 4$ in

$$2 - \frac{2}{3\cdot 3!} + \frac{2}{5\cdot 5!} - \frac{2}{7\cdot 7!} = 1.89217$$

6. Sestavi enostavno kvadraturno formulo za singularne integrale oblike

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx \approx w_0 f(0) + w_1 f(1/2) + w_2 f(1)$$

Uteži w_i izbereš tako, da je formula točna za $f(x) = 1$, x in x^2. S pomočjo dobljene formule izračunaj približno vrednost integrala

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sqrt{x}}\, dx \tag{6}$$

in jo primerjaj z rešitvijo, natančno na štiri decimalna mesta. ki jo dobiš s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto funkcije $f(x)$ v okolici točke 0.

Rešitev: Rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 &= w_0 + w_1 + w_2 \\
\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} &= \frac{1}{2} w_1 + w_2 \\
\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5} &= \frac{1}{4} w_1 + w_2
\end{aligned}$$

in dobimo rešitev $w_0 = 4/5$, $w_1 = 16/15$ in $w_2 = 2/15$. Približna vrednost integrala (6) je

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sqrt{x}} dx \approx \frac{4}{5}\cos 0 + \frac{16}{15}\cos\frac{1}{4} + \frac{2}{15}\cos\frac{1}{2} = 1.95052$$

Razvijemo funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto v okolici $x = 0$.

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{384} - \dots$$

Izračunamo integral

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x^{3/2}}{8} + \frac{x^{7/2}}{384} \right) dx = 1.95058 \tag{7}$$

Rezultat se razlikuje od točne vrednosti za manj kot $1/46080$, kolikor je maksimalna vrednost prvega izpuščenega člena v razvoju (7) (alternirajoča vrsta).

7. Reši integral s popravljeno Simpsonovo kvadraturno formulo za singularne integrale in primerjaj rezultat z rešitvijo, točno na tri decimalna mesta, ki jo dobiš s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto.

$$\int_0^{1/2} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\, dx$$

Rešitev:

$$\int_{-1}^{1/2} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(1/4) + w_3 f(1/2)$$

Taylorjeva vrsta: $F(x) = 2\sqrt{x} - \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{1}{9}x^{9/2}$, $I = F(1/2) - F(0) = 1.348$
Kvadraturna formula: $\frac{\sqrt{2}}{15}\,(9f(0) + 7f(1/4) - f(1/2)) = 1.328$

8. Poišči približno vrednost integrala

$$\int_0^1 x e^{-x^2}\, dx$$

s pomočjo enostavne Gaussove kvadraturne formule.

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx w f(\xi) + w f(1 - \xi)$$

Parametra w in ξ določiš tako, da je formula točna za potenčne funkcije x^n, kjer je $n = 0,\ 1,\ 2$.

Rezultat primerjaj s točno rešitvijo.

Rešitev: Izpolnjeni morajo biti naslednji pogoji:

$$\int_0^1 x^n\, dx = w\xi^n + w(1 - \xi)^n, \quad n = 0, 1, 2$$

Od tod dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 1 &= 2w, \quad n = 0 \\ \frac{1}{2} &= w\xi + w(1 - \xi), \quad n = 1 \\ \frac{1}{3} &= w\xi^2 + w(1 - \xi)^2, \quad n = 2 \end{aligned}$$

Prva in druga enačba sta odvisni, iz njiju pa dobimo $w = \frac{1}{2}$. Vstavimo v tretjo enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \xi^2 - \xi + \frac{1}{2} \\ 0 &= \xi^2 - \xi + \frac{1}{6} \\ \xi &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Točna vrednost: $\frac{e-1}{2e} \approx 0.31606$.
Kvadraturna formula: 0.312754.

3.3 Diferencialne enačbe

1. Numerično reši diferencialno enačbo

$$y'(x) = -y, \quad y(0) = 1,$$

po navadni Eulerjevi metodi in po Heunovi metodi.

- Euler:
$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)\, h$$
- Heun:
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}))$$

Vzemi, da je $h = \frac{1}{2}$ in izračunaj približno vrednost $y(1)$ po eni in drugi metodi.
Funkcija $y(x)$ je padajoča in v limiti, ko x narašča čez vse meje, gre proti nič. Največ kolikšen je lahko korak h po eni in po drugi metodi da rešitev še ohrani to lastnost.

Rešitev: Zapišimo formulo za izračun funkcijskih vrednosti y_k po eni in drugi metodi.

- Euler:
$$y_{k+1} = y_k - y_k\, h = y_k(1-h) = y_0(1-h)^{k+1}$$
Približna vrednost $y(1)$ je v tem primeru enaka $y_2 = 1(1-1/2)^2 = 0.25$.
- Heun:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}(-y_k - y_{k+1}) \\ y_{k+1}(1 + \frac{h}{2}) &= y_k(1 - \frac{h}{2}) \\ y_{k+1} &= y_k \frac{1-\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}} = y_0 \left(\frac{1-\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

Približna vrednost $y(1)$ je v tem primeru enaka $y_2 = 1(1-1/4)^2/(1+1/4)^2 = 0.36$.

Točna vrednost na 6 decimalnih mest pa je enaka 0.367879.

Vidimo, da mora biti v prvem primeru izpolnjeno $|1-h| < 1$, to pomeni, da mora biti pozitiven $h < 1$. V drugem primeru pa je za pozitivne h kvocient vedno manj kot 1.

$$\left|\frac{1-\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}}\right| < 1, \quad h > 0$$

2. Numerično reši diferencialno enačbo

$$y'(x) = -y(x), \quad y(0) = y_0 = 1$$

Izberi korak $h = 0.1$ in določi $y(1)$, po metodi, ki jo izpeljemo iz razvoja v Taylorjevo vrsto do vključno kvadratnega člena. Primerjaj rešitev s točno rešitvijo in rešitvijo, ki jo dobimo s po običajni Eulerjevi metodi.

Rešitev diferencialne enačbe je:

(1) monotono padajoča funkcija, katere

(2) limita je enaka nič, ko x raste čez vse meje.

Primerjaj našo metodo z običajno Eulerjevo metodo in ugotovi pri obeh, za katere pozitivne vrednosti koraka h približna rešitev ohranja obe oziroma eno od lastnosti.

Rešitev: Razvoj v Taylorjevo vrsto do vključno kvadratnega člena je:

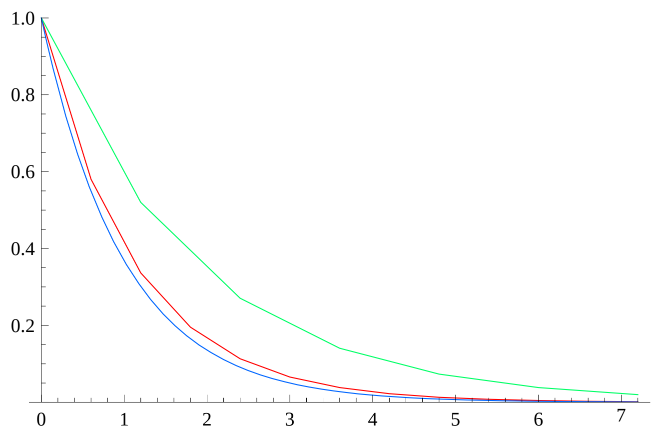
$$y(x+h) \approx y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2}$$

Od tod sledi formula

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k - y_k\, h + y_k \frac{h^2}{2} \\
y_{k+1} &= \frac{y_k}{2}(2 - 2h + h^2) \\
y_{k+1} &= \frac{y_k}{2}\left(1 + (1-h)^2\right) \\
y_{k+1} &= y_0 \left(\frac{1}{2}\left(1 + (1-h)^2\right)\right)^{k+1}
\end{aligned}$$

Približna vrednost $y(1)$ pri koraku $h = 0.1$ po tej metodi je 0.368541, medtem ko je točna rešitev enaka $1/e \approx 0.367879$.

Izraz $\frac{1}{2}(1 + (1-h)^2)$ je vedno pozitiven in je manjši od 1 za pozitivne h, ki so manj od 2. Od tod velja, da se za $0 < h < 2$ ohranita obe lastnosti

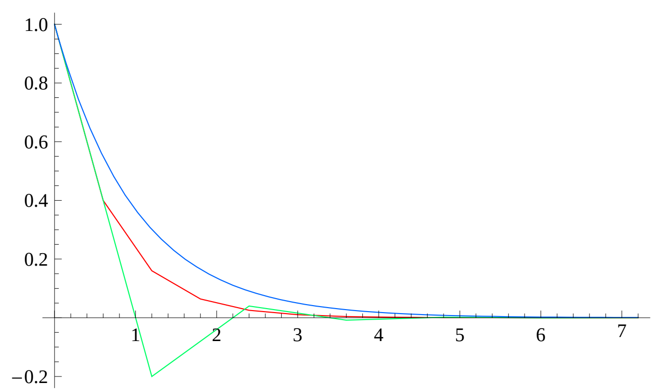


Slika 5: Rešitve za $h = 0.6$ in $h = 1.2$ po naši metodi in točna rešitev.

(1) monotonost, ker je izraz pozitiven in (2) pada proti 0, ker je izraz absolutno manj kot 1. Za običajno Eulerjevo formulo velja

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k - y_k\, h \\
y_{k+1} &= y_0(1-h)^{k+1}
\end{aligned}
$$

Približna vrednost $y(1)$ pri koraku $h = 0.1$ po Eulerjevi metodi je 0.348678. Za pozitivne h sta izpolnjeni obe lastnosti, če je $h < 1$. Če je $1 < h < 2$, lastnost monotonosti ni izpolnjena. Če je $h \geq 2$ ni izpolnjena nobena od lastnosti.



Slika 6: Rešitve za $h = 0.6$ in $h = 1.2$ po Eulerjevi metodi in točna rešitev.

3. Numerično reši diferencialno enačbo

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

na dva načina. Če je enačba $y' = f(y)$, potem je

a) Eulerjeva metoda: $y_{n+1} = y_n + hf(y_n)$
b) Heunova metoda: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(y_n) + f(y_{n+1}))$

Vzemi korak $h = 0.5$ in naredi 4 korake po prvi in drugi metodi. Rezultate, ki jih dobiš, primerjaj s točno rešitvijo. Katera metoda je boljša?

Rešitev: Točno rešitev dobimo z nekaj znanja Matematike II: $y(x) = e^x$.
Za obe numerični metodi, je $f(y) = y$.
Pri Eulerjevi metodi dobimo:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hy_0 = y(0)(1+h) \\ y_2 &= y_1 + hy_1 = y(0)(1+h)^2 \\ &\dots \\ y_n &= y(0)(1+h)^n \end{aligned}$$

Pri Heunovi metodi dobimo:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = y_0 \frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}} \\ y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) = y_0 \left(\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}} \right)^2 \\ &\dots \\ y_n &= y_0 \left(\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}} \right)^n \end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $h = \frac{1}{2}$ in $y_0 = 1$, in dobimo naslednje vrednosti:

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
točna	1.0000	1.6487	2.7183	4.4817	7.3891
Heun	1.0000	1.6667	2.7778	4.6296	7.7160
Euler	1.0000	1.5000	2.2500	3.3750	5.0625

Opazimo, da je Heunova metoda bolj natančna od Eulerjeve metode.

4. Reši robni problem za Airyevo diferencialno enačbo.

$$y''(x) = -16xy(x), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

Naj bo $h = 1/4$. Drugi odvod nadomestiš z drugo razliko

$$\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2}, \quad k = 1, \dots, 3,$$

$$y_0 = y(0) \quad \text{in} \quad y_4 = y(1).$$

Rešitev: Rešiti moramo sistem enačb

$$y_{k-1} + (x_k - 2)y_k + y_{k+1} = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Razširjena matrika sistema je

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{7}{4} & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & 0 \end{array}\right]$$

Rešitev je

$$y_1 = \frac{28}{9}, \quad y_2 = \frac{40}{9}, \quad \text{in} \quad y_3 = \frac{32}{9}.$$