Laboratorijske vaje Numerične metode

9. Vaja

B. Jurčič Zlobec[1], A. Perne[1]

[1]Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za Elektrotehniko 1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenija

Numerične metode FE, Ljubljana, 4. december 2012

Newtonov interpolacijski polinom

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x0}$$

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & f(x_1) & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & f[x_1, x_2] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] & \\
x_2 & f(x_2) & & f[x_1, x_2, x_3] & \vdots & \ddots \\
 & & f[x_2, x_3] & \vdots & & \\
x_3 & f(x_3) & \vdots & & & \\
\vdots & \vdots & & & &
\end{array}$$

Program

Deljene razlike

```
function D=Newtons_Interp(x,y);
x=x(:); y=y(:);
n=length(x);
D=zeros(n);
D(:,1)=y;
for i=1:n-1;
  D(1:end-i,1+i)=diff(D(1:end-i+1,i))...
  ./(x(i+1:end)-x(1:end-i));
end;
D=D(1,:);
```

Primer

Izračunajmo približek za cos(0.15), tako da interpoliraš polimom skozi točke $(x_i, \cos(x_i))$, kjer je $x_i = i/10$, $i = 0, 1, 2, 3$.

```
x=linspace(0,0.3,4);
x0=0.15; n=length(x);
y=cos(x);
d=Newtons_Interp(x,y);
dx=x0-x;
y0=d(end);
for i=n-1:-1:1
  y0=y0*dx(i)+d(i);
end;
printf('y0=%f, cos(%0.2f)=%f\n',y0, x0, cos(x0));
```

```
y0=0.988769, cos(0.15)=0.988771
```

Sistem enačb

$y_i = p_n(x_i),\ i = 0, \ldots, n$

$$
\begin{array}{rcl}
y_0 & = & a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n \\
y_1 & = & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n \\
\ldots & & \ldots \\
y_n & = & a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n
\end{array}
$$

Program

Funkcija, za dana vektoja `x` in `y`, vrača vektor koeficientov interpolacijskega polinoma.

```
function a=Interpol(x,y);
n=length(x);
x=x(:); y=y(:);
A=[ones(size(x)),x];
for i=3:n
  A=[A,A(:,end).*x];
end;
a=A\y;
```

Primer

Rešimo gornji primer z novo funkcijo `Interpol`.

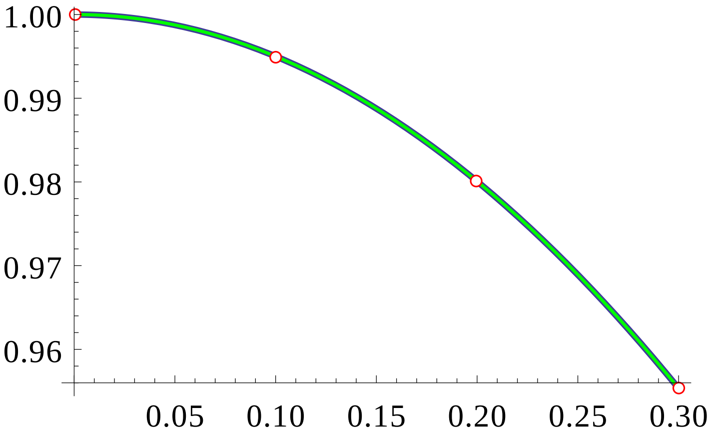
```
x=linspace(0,0.3,4);
x0=0.15; n=length(x);
y=cos(x);
d=Interpol(x,y);
y0=d(end);
for i=n-1:-1:1
  y0=y0*x0+d(i);
end;
printf('y0=%f, cos(%0.2f)=%f\n',y0, x0, cos(x0));
```

Uporaba funkcij sistema Octave

Funkciji polyfit in polyval

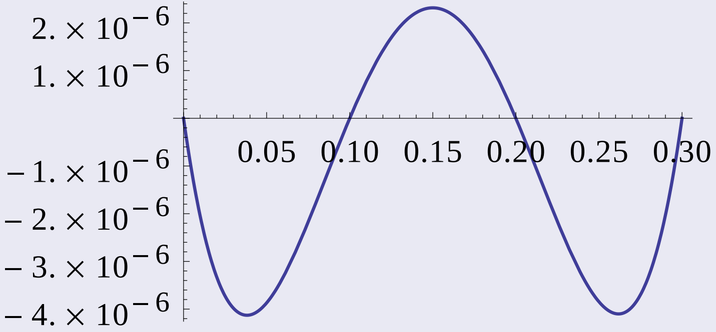
```
x=linspace(0,0.3,4);
x0=0.15; n=length(x); y=cos(x);
d=polyfit(x,y,n-1);
y0=polyval(d,x0);
printf('y0=%f, cos(%0.2f)=%f\n',y0, x0, cos(x0));
%% graf za primerjavo
xx=linspace(0,0.3);
yp=polyval(d,xx); yy=cos(xx);
plot(xx,yp,xx,yy,x,y,'o');
figure; % razlika
plot(xx,yy-yp);
```

Slika 1



Slika 2

Razlika med funkcijo in interpolacijskim polinomom

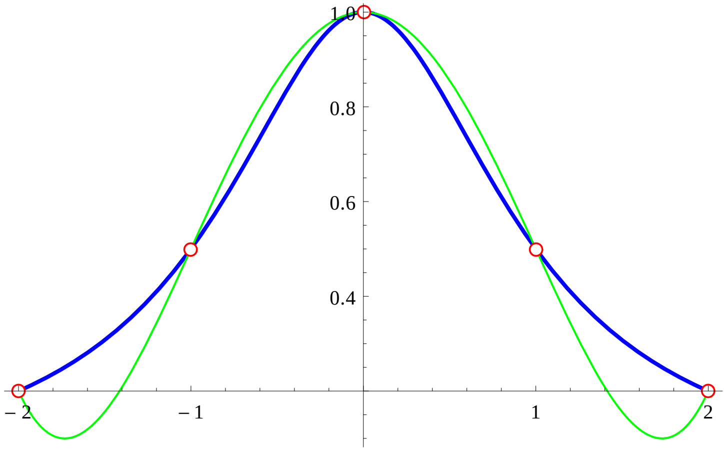


Primer neustrezne interpolacije

Poišči interpolacijski polinom skozi točke $T_i(x_i, y_i)$,
$x = -2, -1, 0, 1, 2$ in $y = f(x)$, kjer je $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

```
x=linspace(-2,2,5);
y=1./(1+x.^2);
d=polyfit(x,y,4);
xx=linspace(-2,2);
yp=polyval(d,xx);
yy=1./(1+xx.^2);
figure;
plot(xx,yp,xx,yy,x,y,'o');
```

Slika 3



Reševanje predoločenih sistemov v smislu najmanših kvadratov

Minimizirajmo funkcijo $S = S(x_1, \ldots, x_n)$, $m > n$.
Matrika $A = [a_{i,j}]$ je polnega ranga.

$$
\begin{aligned}
S &= \\
(b_1 &- a_{1,1}x_1 - a_{1,2}x_2 - \cdots - a_{1,n}x_n)^2 + \\
(b_2 &- a_{2,1}x_1 - a_{2,2}x_2 - \cdots - a_{2,n}x_n)^2 + \\
\ldots & \quad \ldots \\
(b_m &- a_{m,1}x_1 - a_{m,2}x_2 - \cdots - a_{m,n}x_n)^2
\end{aligned}
$$

$$\|Ax - b\|^2 = \min_u \|A\,u - b\|^2, \quad A^T A\,x = A^T b.$$

Primer

Položimo premico ob točke $T_i(x_i, y_i)$ v smislu najmanjših kvadratov, kjer je $x = (0, 1, 2, 3, 4)$ in $y = (1.5, 2.5, 3.0, 3.5, 3.7)$.

Enačba premice: $y = \alpha\, x + \beta$. Minimiziramo funkcijo:

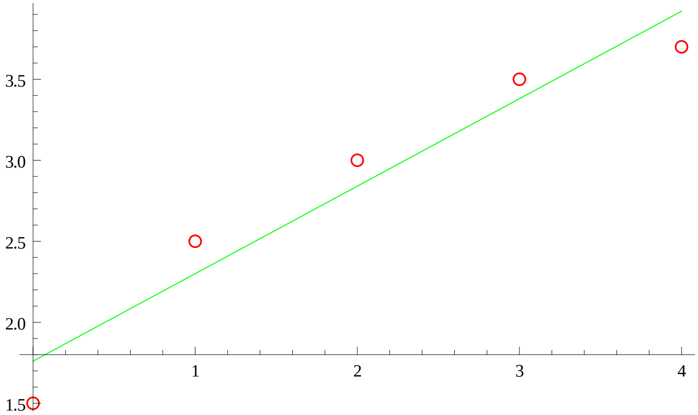
$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - \alpha x_i - \beta)^2.$$

Matrika $A = [x, 1]$, desna stran je y.

```
x=[0;1;2;3;4]; y=[1.5;2.5;3.0;3.5;3.7];
A=[x,ones(size(x))];
a=(A'*A)\(A'*y); printf('a=(%f,%f)\n',a);
a=A\y; printf('a=(%f,%f)\n',a);
d=polyfit(x,y,1); printf('d=(%f,%f)\n',d);
```

d=(0.540000,1.760000)

Slika 4



Primer

Določimo konstanti α in β tako, da bo linearna kombinacija $\alpha e^{-x} + \beta x$ aproksimirla točke $T_i(x_i, y_i)$ v smislu najmanjših kvadratov, kjer je
$x = (0, 1, 2, 3, 4)$ in $y = (5, 1, -1.5, -2.5, -4, -5)$.

Minimiziramo funkcijo:

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - \alpha e^{-x_i} - \beta x_i)^2.$$

Matrika $A = [e^{-x}, x]$, desna stran je y.

```
x=[0;1;2;3;4;5]; y=[5;1;-1;-2.5;-4;-5];
A=[exp(-x),x];
a=A\y; printf('a=(%f,%f)\n',a);
```

```
a=(5.084721,-0.982730)
```

Slika 5