Laboratorijske vaje Numerične metode

Uvod

B. Jurčič Zlobec[1], A. Perne[1]

[1]Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za Elektrotehniko
1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenija

Numerične metode FE, Ljubljana, 10. oktober 2012

Taylorjeva vrsta

Razvij v Taylorjevo vrsto funkcijo $f(x) = e^{-x^2}$ in s pomočjo razvoja poišči približno vrednost integrala: $I = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx$.

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} \to \int_0^1 e^{-x^2}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} \tag{1}$$

Seštejemo 11 členov gornje vrste (1). Kakšna je ocena napake? Uporabili bomo ukaze: `sum()` `.∧` `.*` `./` `:` in `gamma()`, $\Gamma(k+1) = k!$.

```
format long; k=0:10;
s= (-1).∧k./(2*k+1)./gamma(k+1); tintegral=sum(s);
printf('tintegral=%2.10f\n',tintegral);
```

Analitično

Izračunaj gornji integral z uvedbo nove spremenljivke $t = x^2$ in uporabo funkcije `gammainc()`,
Določi relativno napako. $\delta = \left|\frac{(I - T_{10})}{I}\right|$. Abolutna vrednost `abs()`.

$$\gamma(x,a) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x t^{a-1} e^{-t}\, dt.$$

$$t = x^2 \to dt = 2x\, dx \to dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \to$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{1/2-1} e^{-t}\, dt$$

```
integral=gammainc(1,1/2)/2*gamma(1/2);
printf('integral=%2.10f\n',integral);
delta=abs((integral-tintegral)/integral);
printf('delta=%2.10f\n',delta);
```

Izračunaj izraz $(\sqrt{1+x}-1)/x$ na dva načina

Velja

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \qquad (2)$$

Za majne x je račun, kjer odštevamo dve približno enaki števili, slabo pogojen. Uporabili bomo funkcijo kvadratni koren `sqrt()`. Kateri račun da natančnejši rezultat?

Izračun s programom `Mathematica`® na 50 točnih mest:
0.49875621120890270219264912759576186945023470026377

```
x=0.01;
i1=(sqrt(1+x)-1)/x;
i2=1/(sqrt(1+x)+1);
printf('prvi=%0.16f drugi=%0.16f\n',i1,i2);
```

Izračunaj integral $I_n = \int_0^1 x^n/(x+10)\,dx$, s pomočjo rekurzivne formule, na dva načina, za $n = 1, 2, \ldots, 17$.

$$I_n + 10I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + 10x^{n-1}}{x+10}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$$

1. rekurzivna formula:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x+10} = \log\frac{11}{10}, \;\; I_n = \frac{1}{n} - 10I_{n-1}, \;\; n = 1, \ldots, 17. \qquad (3)$$

2. rekurzivna formula:

$$I_{30} = 0, \;\; I_{n-1} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{n} - I_n\right), \;\; n = 30, \ldots, 1. \qquad (4)$$

Program

Uporabili bomo zanko `for`, funkcijo `log()` in operacijo `[,]`.
Rezultat prve je `I1` in rezultat druge rekurzivne formule je `I2`.

Vrednost I_{14} na 50 mest s programom `Mathematica`® je:
0.00609541530334816752931308062755095544000954407183 64

```
format long;
i=log(11/10); I1=i;
for k=1:17,
  i=1/k-10*i; I1=[I1,i];
end;
i=0; I2=i;
for k=40:-1:1
  i=(1-k*i)/10/k; I2=[i,I2];
end;
I2=I2(1:18);
printf('prvi=%0.16f drugi=%0.16f\n',I1(15),I2(15));
```