Laboratorijske vaje Numerične metode

13. Vaja

B. Jurčič Zlobec[1], A. Perne[1]

[1]Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za Elektrotehniko 1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenija

Numerične metode FE, Ljubljana, 8. januar 2013

Gaussova kvadraturna formula

Določi uteži w_1 in w_2 ter vozlišči x_1 in x_2 tako, da bo kvadraturna formula

$$\int_0^1 f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

točna za $f(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, 3$.

Iz pogojev $\int_0^1 x^n\, dx = w_1 x_1^n + w_2 x_2^n$ dobimo enačbe:

$$\begin{aligned}
1 - w_1 - w_2 &= 0, \\
1/2 - w_1 x_1 - w_2 x_2 &= 0, \\
1/3 - w_1 x_1^2 - w_2 x_2^2 &= 0, \\
1/4 - w_1 x_1^3 - w_2 x_2^3 &= 0
\end{aligned}$$

Sistem rešimo s pomočjo Newtonove metode.

Program

Definicije

```
f=inline('[1-w1-w2;1/2-w1*x1-w2*x2;1/3-w1*x1^2-\
w2*x2^2;1/4-w1*x1^3-w2*x2^3]','x1','w1','x2','w2');
df=inline('[0,-1,0,-1;-w1,-x1,-w2,-x2;\
-2*w1*x1,-x1^2,-2*w2*x2,-x2^2;-3*w1*x1^2,\
-x1^3,-3*w2*x2^2,-x2^3]','x1','w1','x2','w2');
```

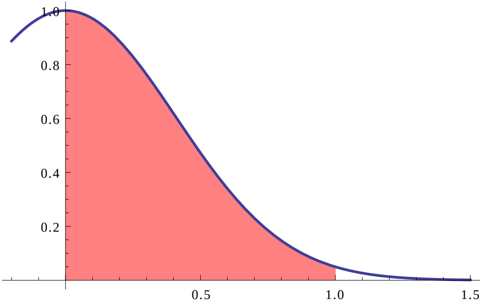
Newtonova metoda

```
u=[0;1;1;1]; eps=1e-8;
for i=1:100
    x1=u(1);w1=u(2);x2=u(3);w2=u(4);
    u=[x1;w1;x2;w2]-df(x1,w1,x2,w2)\f(x1,w1,x2,w2);
    if abs(u-[x1;w1;x2;w2])<eps,break,end;
end;
```

Primer

Izračunaj priblizno vrednost integrala $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

s pomočjo gornje Gaussove kvadraturne formule. Tako da interval $[0,1]$ razdeliš na 10 enakih delov, in zapišeš sestavljeno formulo. Točna vrednost integrala na 16 decimalnih mest je 0.7468241328124270.



Program

`w1=u(2), w2=u(4), x1=u(1), x2=u(3).`
Vozlišča na posameznem intervalu so zapisana v matriki `H`.

```
x1=u(1); w1=u(2); x2=u(2);w2=u(4);
g=inline('exp(-x.^2)','x');
n=10; a=0; b=1;
h=(b-a)/n;
I=h*sum([w1*g(h*((0:(n-1))+x1)),w2*g(h*((0:(n-1))+x2))]);
printf('I=%0.10f',I);
```

```
I=0.7468240988
```

Reši robni problem

Poišči približno rešitev Laplaceove enačbe

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

na območju $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1]$ z robnim pogojem

$$u(x,y) \quad \Big|_{\partial\mathcal{D}} = f(x,y)$$

kjer je $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Na območje $\mathcal{D}$ položiš kvadratno mrežo s korakom $h = 1/n$, $n = 10$.
Na vsakem notranjem vozlišču odvode nadomestiš z razlikami in zapišeš sistem enačb, ki ga rešiš z Gauss-Seidlovo iteracijo.

Sistem enačb

Približne vrednosti rešitve zapišemo v matriko $U_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$, $i = 0, \dots n$ in $j = 0, \dots n$. Za $i = 0$, $i = n$, $j = 0$ in $j = n$ zapišemo ustrezne robne vrednosti.

Sistem enačb:

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j} = 0,$$

$i, j = 1, \dots, n-1.$
Inicializiramo vrednosti matrike, v notranjih vozliščih postavimo vrednost na 0, na robu pa zapišemo ustrezne robne vrednosti.

$$U_{i,j}^{k+1} = (U_{i+1,j}^{k} + U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k} + U_{i,j-1}^{k+1})/4.$$

Program

Gauss-Seidlova iteracija

```
f=inline('x.^2+y.^2','x','y');
n=10; h=1/n; eps=1e-8; [x,y]=meshgrid(0:h:1,0:h:1);
U=f(x,y); U(2:end-1,2:end-1)=0; mesh(U);
for k=1:1000
  V=U;
  for i=2:n,
   for j=2:n,
     U(i,j)=(U(i+1,j)+U(i-1,j)+U(i,j-1)+U(i,j+1))/4;
   end;
  end;
  if abs(U-V)<eps, break, end;
end;
figure; mesh(U);
```

Slika