Iterativno reševanje sistemov linearnih enačb

Numerične metode, sistemi linearnih enačb

B. Jurčič Zlobec[1]

[1]Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za Elektrotehniko
1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenija

Numerične metode FE, Ljubljana, Slovenija 27. november 2012

1 Iterativno reševanje sistemov linearnih enačb
- Sistem linearnih enačb
- Razcep matrike sistema
- Konvergenca
- Jacobieva in Gauss-Sidlova iteracija
- Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija v akciji
- Tridiagonalni sistemi

Vsebina

1 Iterativno reševanje sistemov linearnih enačb
- Sistem linearnih enačb
- Razcep matrike sistema
- Konvergenca
- Jacobieva in Gauss-Sidlova iteracija
- Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija v akciji
- Tridiagonalni sistemi

- Sistem linearnih enačb z n neznankami.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in} = b_i \quad i = 1, \ldots, n$$

- V matrični obliki zapišemo:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Matrika $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ je matrika sistema, (koeficieti pred nezanakami).
- Vektor $\mathbf{x} = (x_i)_n$ je vektor neznank in
- vector $\mathbf{b} = (b_i)_n$ je vektor svobodnih členov na desni strani.

Vsebina

1. Iterativno reševanje sistemov linearnih enačb
   - Sistem linearnih enačb
   - Razcep matrike sistema
   - Konvergenca
   - Jacobieva in Gauss-Sidlova iteracija
   - Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija v akciji
   - Tridiagonalni sistemi

Splošno

- Razcepimo matriko $\mathbf{A}$ na razliko matrik $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$.
- Razcep je smiselen, če lahko na preprost način izračunamo inverzno matrtiko $\mathbf{M}^{-1}$.
- Zapišemo sistem

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{M} - \mathbf{N})\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{M}\,\mathbf{x} &= \mathbf{N}\,\mathbf{x} + \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{x} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Iteracija

- Označimo matriko $\mathbf{S} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$,
  ki ji rečemo iteracijska matrika in vektor $\mathbf{c} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$.
- Sistem zapišemo z novimi oznakami:

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\,\mathbf{x} + \mathbf{c}.$$

- Izberemo začetni približek $\mathbf{x}^{(0)}$ in sprožimo iteracijo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{S}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Vsebina

1 Iterativno reševanje sistemov linearnih enačb
- Sistem linearnih enačb
- Razcep matrike sistema
- Konvergenca
- Jacobieva in Gauss-Sidlova iteracija
- Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija v akciji
- Tridiagonalni sistemi

Spektralni radij

- *Spektralni radij matrike* je enak absolutno največji lastni vrednosti matrike.
- Spektralni radij matrike $\mathbf{S}$ označimo z $\rho(\mathbf{S})$.
- Spektralni radij matrike je manjši ali enak normi matrike, $\rho(\mathbf{S}) \leq \|\mathbf{S}\|$.
- Zaporedje $\mathbf{x}^{(k)}$ je konvergentno, ko je $\rho(\mathbf{S}) < 1$.

Vsebina

1 Iterativno reševanje sistemov linearnih enačb
- Sistem linearnih enačb
- Razcep matrike sistema
- Konvergenca
- Jacobieva in Gauss-Sidlova iteracija
- Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija v akciji
- Tridiagonalni sistemi

Razcepimo matriko $\mathbf{A}$ na vsoto $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$.
Sumandi so strogo spodnjetrikotna, diagonalna in strogo zgornjetrikotna matrika matrike $\mathbf{A}$.

- Jacobijeva iteracija

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \quad \text{in} \quad \mathbf{N} = -\mathbf{L} - \mathbf{U}$$

- Gauss-Seidlova iteracija

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L} \quad \text{in} \quad \mathbf{N} = -\mathbf{U}$$

Razcepimo matriko $\mathbf{A}$ na vsoto $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$.
Sumandi so strogo spodnjetrikotna, diagonalna in strogo zgornjetrikotna matrika matrike $\mathbf{A}$.

- Jacobijeva iteracija

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \quad \text{in} \quad \mathbf{N} = -\mathbf{L} - \mathbf{U}$$

- Gauss-Seidlova iteracija

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L} \quad \text{in} \quad \mathbf{N} = -\mathbf{U}$$

Razcepimo matriko $\mathbf{A}$ na vsoto $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$.
Sumandi so strogo spodnjetrikotna, diagonalna in strogo zgornjetrikotna matrika matrike $\mathbf{A}$.

- Jacobijeva iteracija

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \quad \text{in} \quad \mathbf{N} = -\mathbf{L} - \mathbf{U}$$

- Gauss-Seidlova iteracija

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L} \quad \text{in} \quad \mathbf{N} = -\mathbf{U}$$

Diagonalno dominantne matrike

Matrika je diagonalno dominantna, še je absolutna vsota izvediagonalnih členov matrike majša od absolutne vrednosti diagonalnega člena.

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n$$

Norma matrike

$$\|\mathbf{S}\| = \sup_{\mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{S}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Neskončna norma je maksimalna absolutna vrstična vsota.

$$\|\mathbf{S}\|_\infty = \max_i \left(\sum_j |s_{ij}| \right).$$

Če je matrika $\mathbf{A}$ diagonalno dominantna, potem je iteracijska matrika $\mathbf{S}$ Jacobijeve iteracije konvergentna. Njena neskončna norma je pod 1, $\|\mathbf{S}\|_\infty < 1$.

Elementi iteracijske matrike so

$$s_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Velja, *(zaradi diagonalne dominantnosti matrike* $\mathbf{A}$):

$$\sum_j |s_{ij}| < 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Vsebina

1 Iterativno reševanje sistemov linearnih enačb
- Sistem linearnih enačb
- Razcep matrike sistema
- Konvergenca
- Jacobieva in Gauss-Sidlova iteracija
- Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija v akciji
- Tridiagonalni sistemi

Jacobijeva iteracija

$$a_{ii}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j\neq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j} s_{ij}x_j^{(k)} + c_i$$

Gauss-Seidlova iteracija

$$a_{ii}x_i + \sum_{j<i} a_{ij}x_j = -\sum_{j>i} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} + \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} = -\sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j<i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Program

Dana je diagonalno dominantna matrika $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{b}$.

Reši sistem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ z Jacobijevo in Gauss-Seidlovo iteracijo.

Priprava

```
d=diag(A);S=A;c=b./d;n=length(d);
eps=1e-5;m=1000;
for i=1:n
   S(i,i)=0; S(i,:)=S(i,:)/d(i);
end;
```

Jacobijeva iteracija

```
x=zeros(size(d));
for i=1:m
   xx=x;
   x=S*x+c;
   if abs(x-xx)<eps, break, end;
end;
```

Gauss-Seidlova iteracija

```
x=zeros(size(b));
for i=1:m
   xx=x;
   for j=1:n
      x(j)=S(j,:)*x+c(j);
   end;
   if abs(xx-x)<eps, break, end;
end;
```

Vsebina

1 Iterativno reševanje sistemov linearnih enačb
- Sistem linearnih enačb
- Razcep matrike sistema
- Konvergenca
- Jacobieva in Gauss-Sidlova iteracija
- Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija v akciji
- Tridiagonalni sistemi

Razcep po Jacobiju

$$\begin{aligned} d_1 x_1 &= -u_1\, x_2 + b_1 \\ d_i x_i &= -l_{i-1}\, x_{i-1} - u_i\, x_{i+1} + b_i \quad i = 2, \dots n-1 \\ d_n x_n &= -l_{n-1}\, x_{n-1} + b_n \end{aligned}$$

Jacobijeva iteracija

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -u_1/d_1\, x_2^{(k)} + b_1/d_1 \\ x_i^{(k+1)} &= -l_{i-1}/d_i\, x_{i-1}^{(k)} - u_i/d_i\, x_{i+1}^{(k)} + b_i/d_i \quad i = 2, \dots n-1 \\ x_n^{(k+1)} &= -l_{n-1}/d_n\, x_{n-1}^{(k)} + b_n/d_n \end{aligned}$$

Razcep po Gauss-Seidlu

$$\begin{aligned} d_1 x_1 &= -u_1 x_2 + b_1 \\ d_i x_i + l_{i-1} x_{i-1} &= -u_i x_{i+1} + b_i \quad i = 2, \dots n-1 \\ d_n x_n + l_{n-1} x_{n-1} &= b_n \end{aligned}$$

Gaus-Seidlova iteracija

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -u_1/d_1\, x_2^{(k)} + b_1/d_1 \\ x_i^{(k+1)} &= -l_{i-1}/d_i\, x_{i-1}^{(k+1)} - u_i/d_i\, x_{i+1}^{(k)} + b_i/d_i \quad i = 2, \dots n-1 \\ x_n^{(k+1)} &= -l_{n-1}/d_n\, x_{n-1}^{(k+1)} + b_n/d_n \end{aligned}$$

Program

Podatki

```
n=5;
d=1.91*ones(1,n);
u=ones(1,n-1);
l=ones(1,n-1);
b=2+sin(1:n);
eps=1e-5; m=1000;
```

Priprava

```
c=b./d;
u=u./d(1:end-1);
l=l./d(2:end);
```

Jacobiejeva iteracija

```
xx=zeros(size(c));
for k=1:m,
    x=xx;
    xx(1)=-u(1)*x(2)+c(1);
    for i=2:n-1,
       xx(i)=-l(i-1)*x(i-1)-u(i)*x(i+1)+c(i);
    end;
    xx(n)=-l(n-1)*x(n-1)+c(n);
    if abs(x-xx)<eps, break, x=xx; end;
end;
```

Gaus-Seidlova iteracija

```
x=zeros(size(c));
for k=1:m,
    xx=x;
    x(1)=-u(1)*x(2)+c(1);
    for i=2:n-1,
       x(i)=-l(i-1)*x(i-1)-u(i)*x(i+1)+c(i);
    end;
    x(n)=-l(n-1)*x(n-1)+c(n);
    if abs(x-xx)<eps, break, end;
end;
```