Univerza v Ljubljani, FE

Melita Hajdinjak

Matematika I (VS)

Pregled elementarnih funkcij

2013/14

Potenčna funkcija
Korenska funkcija
Polinom
Racionalna funkcija
Eksponentna funkcija
Logaritemska funkcija
Kotne funkcije
Ciklometrične funkcije
Hiperbolične funkcije

Potenčna funkcija

Funkcijo oblike

$$f(x) = x^n,$$

kjer je $n \in \mathbb{Z}$, imenujemo potenčna funkcija.

Število n imenujemo eksponent.

Funkciji, ki ju dobimo za $n = 0$ in $n = 1$, sta pravzaprav linearni funkciji $f(x) = 1$ in $f(x) = x$, zato ju ne uvrščamo med prave potenčne funkcije.

Definicijsko območje potenčne funkcije je $\mathbb{R}$, če je $n \geq 0$, in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, če je $n < 0$.

Pregled elementarnih funkcij

Potenčna funkcija

Korenska funkcija

Polinom

Racionalna funkcija

Eksponentna funkcija

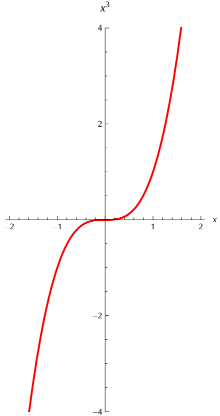
Logaritemska funkcija

Kotne funkcije

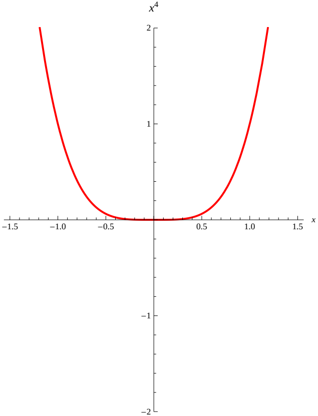
Ciklometrične funkcije

Hiperbolične funkcije

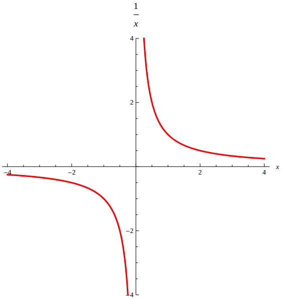
$n \geq 1$, lih:



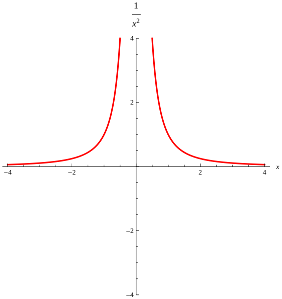
$n > 1$, sod:



$n \leq -1$, lih:



$n < -1$, sod:



Korenska funkcija

Funkcijo oblike

$$f(x) = \sqrt[n]{x},$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, imenujemo korenska funkcija.

Število n imenujemo korenski eksponent.

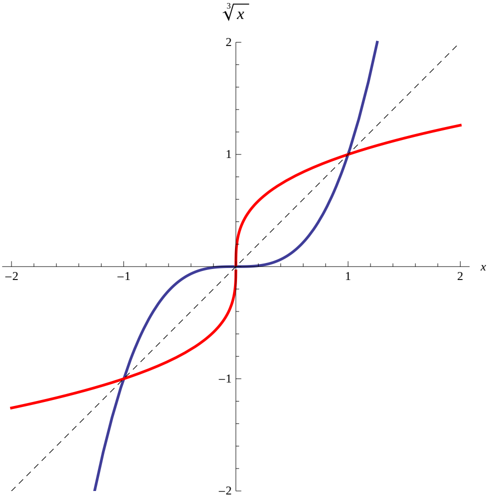
Definicijsko območje korenske funkcije je $\mathbb{R}$, če je n lih, in $[0, \infty)$, če je n sod.

Zveza med korensko in potenčno funkcijo za $n > 1$:

$$\sqrt[n]{x} = y \iff x = y^n.$$

Korenska funkcija je inverzna funkcija (cele ali zožene) potenčne funkcije:

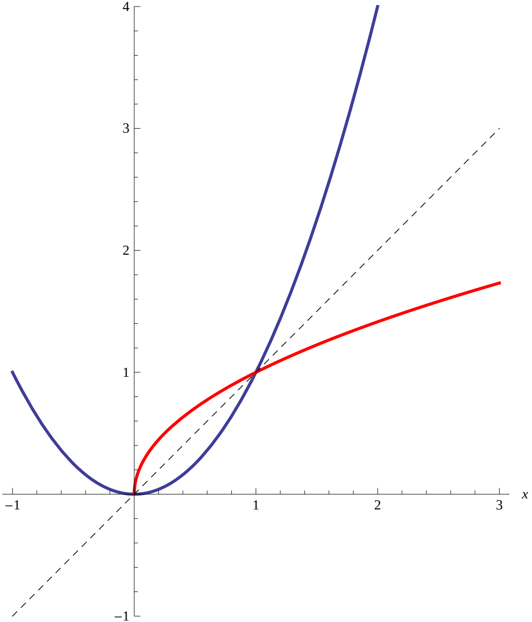
- če je n liho število, je potenčna funkcija $f(x) = x^n$ injektivna funkcija, ki ima inverz $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$,



- če je n sodo število, potenčna funkcija $f(x) = x^n$ ni injektivna funkcija in inverz dobimo, če se omejimo na nenegativna števila.

  Če je x pozitiven, ima enačba $x = y^n$ celo dve realni rešitvi, ki se razlikujeta samo za predznak. Po dogovoru za rezultat n-tega korena izberemo nenegativno rešitev te enačbe.

$\sqrt{x}$



Polinom

Funkcijo oblike

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kjer je $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, imenujemo polinom.

Število n imenujemo stopnja polinoma p.

Definicijsko območje vsakega polinoma je $\mathbb{R}$.

Izrek. (Osnovni izrek algebre)
Polinom p stopnje n ima največ n realnih ničel, torej $p(x) = 0$ za največ n različnih realnih vrednosti spremenljivke x. Natančneje, polinom p stopnje n ima natanko n kompleksnih ničel, od katerih so nekatere lahko tudi večkratne.

Če ima polinom p točno n realnih ničel $x_1, \ldots, x_n$, ga lahko zapišemo v obliki

$$p(x) = a_n(x - x_n)...(x - x_1).$$

Potenčna funkcija
Korenska funkcija
Polinom
Racionalna funkcija
Eksponentna funkcija
Logaritemska funkcija
Kotne funkcije
Ciklometrične funkcije
Hiperbolične funkcije

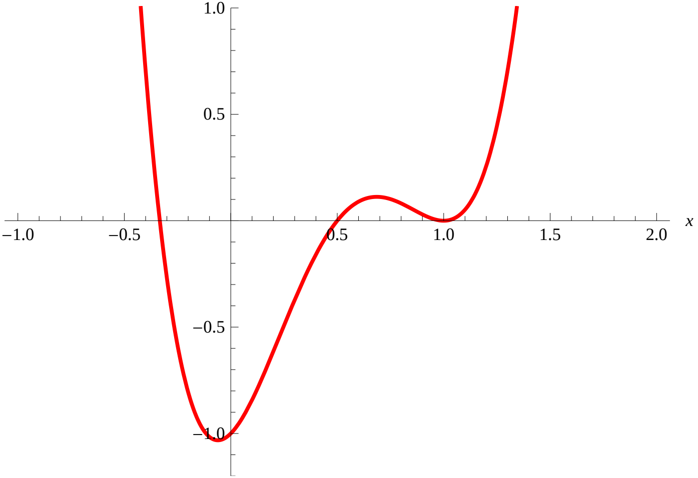
Primer. Narišimo graf polinoma

$$p(x) = 6x^4 - 13x^3 + 7x^2 + x - 1.$$

Niče polinoma lahko iščemo s Hornerjevim algoritmom.

Ničle: $x_{1,2} = 1$ (2. stopnje), $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{1}{3}$.

$6x^4 - 13x^3 + 7x^2 + x - 1$



Pregled elementarnih funkcij

Potenčna funkcija

Korenska funkcija

Polinom

Racionalna funkcija

Eksponentna funkcija

Logaritemska funkcija

Kotne funkcije

Ciklometrične funkcije

Hiperbolične funkcije

Racionalna funkcija

Funkcijo oblike

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kjer sta p in q polinoma, imenujemo racionalna funkcija.

Definicijsko območje racionalne funkcije je množica $\mathbb{R} \backslash \{x : q(x) = 0\}$.

Po osnovnem izreku algebre zato racionalna funkcija ni definirana v največ toliko točkah, kot je stopnja polinoma q.

Pregled elementarnih funkcij

Potenčna funkcija

Korenska funkcija

Polinom

Racionalna funkcija

Eksponentna funkcija

Logaritemska funkcija

Kotne funkcije

Ciklometrične funkcije

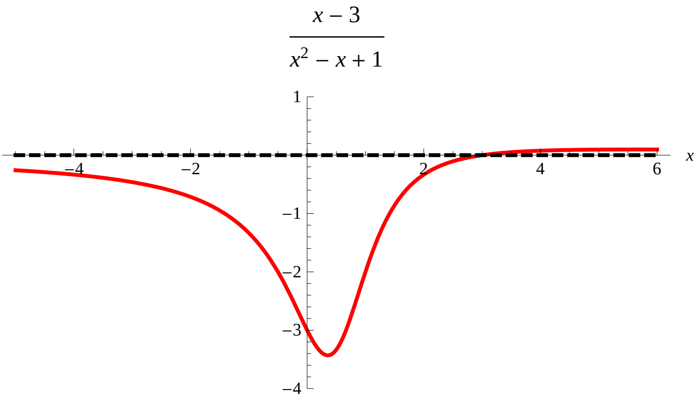
Hiperbolične funkcije

Če želimo narisati graf racionalne funkcije, je dobro skupne faktorje polinomov p in q najprej okrajšati.

Le če polinoma p in q racionalne funkcije R nimata skupnih ničel, namreč velja:

- ničle polinoma p so ničle racionalne funkcije R,
- ničle polinoma q so poli racionalne funkcije R, v okolici katerih je graf R neomejen.

Če je stopnja polinoma p manjša od stopnje polinoma q, ima racionalna funkcija vodoravno asimptoto $y = 0$.



Potenčna funkcija
Korenska funkcija
Polinom
Racionalna funkcija
Eksponentna funkcija
Logaritemska funkcija
Kotne funkcije
Ciklometrične funkcije
Hiperbolične funkcije

Če je stopnja polinoma p večja ali enaka stopnji polinoma q, asimptoto racionalne funkcije dobimo kot kvocient pri deljenju polinomov p in q.

Primer. Izračunajmo asimptoti racionalnih funkcij:

a) $R(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 5}$

b) $R(x) = \dfrac{5x^4 + x^3 - 1}{x^2 + 5}$

Asimptoti: $y = x - 5$ (premica), $y = 5x^2 + x - 25$ (parabola).

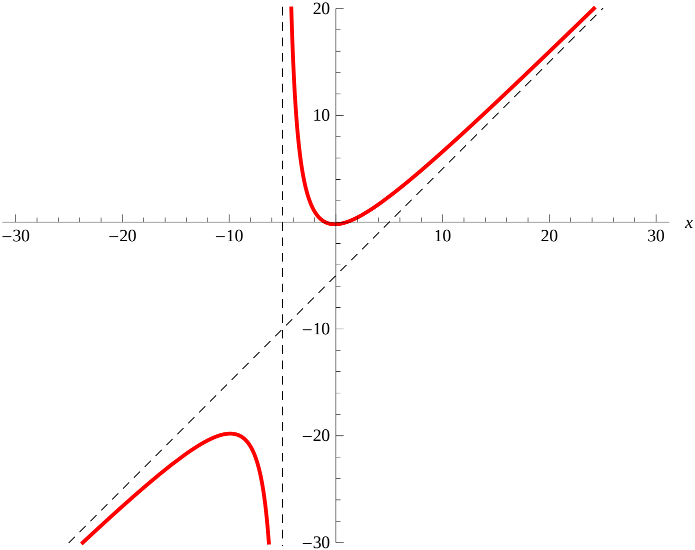
Primer. Narišimo graf racionalne funkcije

$$R(x) = \frac{x^3 - x}{x(x+5)}.$$

Skupne faktorje najprej okrajšajmo!

Ničli $x_{1,2} = \pm 1$, pol $x = -5$, asimptota $y = x - 5$.

$$\frac{x^2 - 1}{x + 5}$$



Eksponentna funkcija

Funkcijo oblike

$$f(x) = a^x,$$

kjer je realno število $a > 0$ in $a \neq 1$, imenujemo eksponentna funkcija.

Najpogosteje uporabljamo osnovo $a = e$, torej

$$f(x) = e^x.$$

Definicijsko območje eksponentne funkcije je množica $\mathbb{R}$.

Pregled elementarnih funkcij

Potenčna funkcija

Korenska funkcija

Polinom

Racionalna funkcija

Eksponentna funkcija

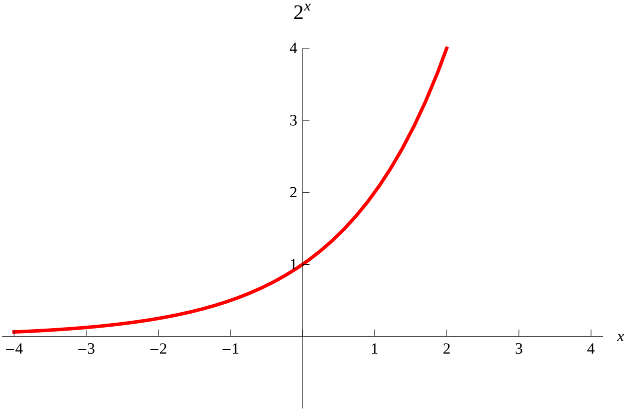
Logaritemska funkcija

Kotne funkcije

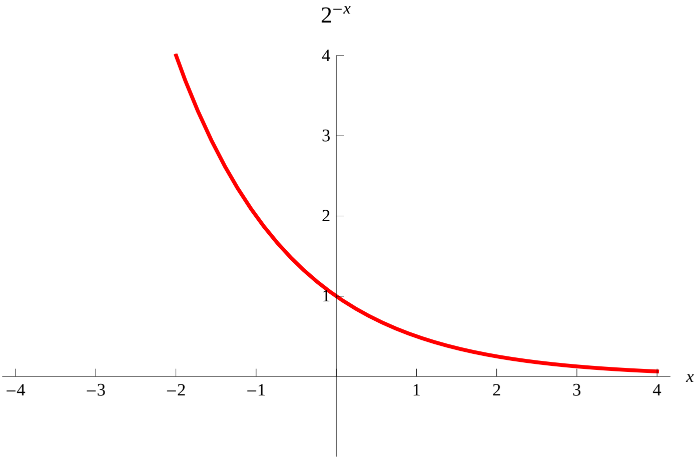
Ciklometrične funkcije

Hiperbolične funkcije

Za $a > 1$ je $f(x) = a^x$ strogo **naraščajoča**, pozitivna in neomejena funkcija. Njena zaloga vrednosti je množica $(0, \infty)$.



Za $0 < a < 1$ je $f(x) = a^x$ strogo **padajoča**, pozitivna in neomejena funkcija. Njena zaloga vrednosti je množica $(0, \infty)$.



Potenčna funkcija
Korenska funkcija
Polinom
Racionalna funkcija
Eksponentna funkcija
Logaritemska funkcija
Kotne funkcije
Ciklometrične funkcije
Hiperbolične funkcije

Eksponentna funkcija je strogo monotona, zato injektivna, torej obstaja njena inverzna funkcija.

Logaritemska funkcija

Inverzna funkcija eksponentne funkcije a^x je oblike

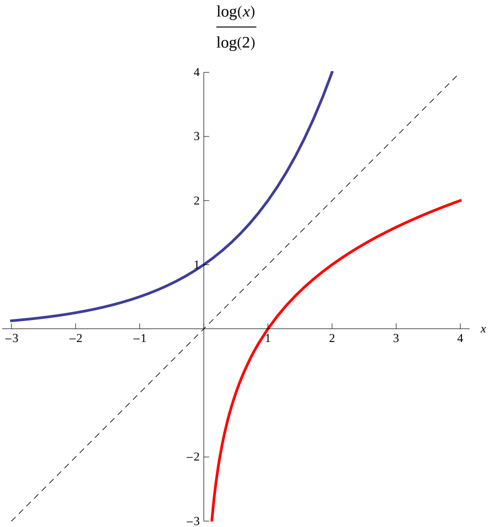
$$f(x) = \log_a x,$$

kjer je realno število $a > 0$ in $a \neq 1$, in jo imenujemo logaritemska funkcija.

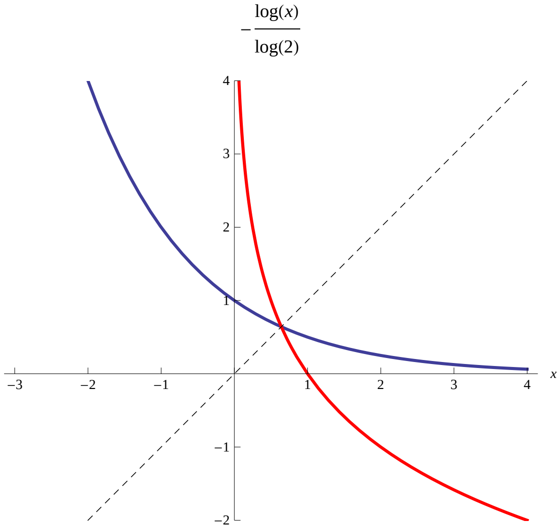
Definicijsko območje logaritemske funkcije je enako zalogi vrednosti eksponentne funkcije, torej množici $(0, \infty)$.

Potenčna funkcija
Korenska funkcija
Polinom
Racionalna funkcija
Eksponentna funkcija
Logaritemska funkcija
Kotne funkcije
Ciklometrične funkcije
Hiperbolične funkcije

Za $a > 1$ je $f(x) = \log_a x$ strogo **naraščajoča** in neomejena funkcija. Njena zaloga vrednosti je množica $\mathbb{R}$.



Za $0 < a < 1$ je $f(x) = \log_a x$ strogo **padajoča** in neomejena funkcija. Njena zaloga vrednosti je množica $\mathbb{R}$.



Lastnosti logaritemske funkcije:

- definirana je samo za pozitivna realna števila,
- je strogo monotona in neomejena,
- premica $x = 0$ je njen pol,
- $\log_a 1 = 0$ (ničla je $x_0 = 1$),
- $y = a^x \iff x = \log_a y$,
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,
- $\log_a x^b = b \log_a x$.

Potenčna funkcija
Korenska funkcija
Polinom
Racionalna funkcija
Eksponentna funkcija
Logaritemska funkcija
Kotne funkcije
Ciklometrične funkcije
Hiperbolične funkcije

Največkrat obravnavamo logaritemsko funkcijo z osnovo

$$a = e.$$

V tem primeru logaritemsko funkcijo imenujemo **naravni logaritem** in pišemo

$$f(x) = \log_e x = \ln x.$$

Opomba. Nekateri naravni logaritem zapisujejo kot $\log x$, kar je včasih tudi oznaka za desetiški logaritem.

Kotne (trigonometrične) funkcije

Kotne funkcije so **sinus**, **kosinus**, **tangens** in **kotangens**.

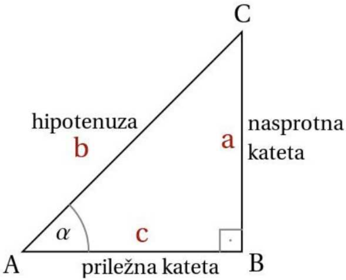
Za kote, manjše od $\pi/2$, so definirane s pomočjo razmerij med stranicami v pravokotnem trikotniku.

$$\sin\alpha = \frac{\text{naspr. kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{pril. kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{naspr. kateta}}{\text{pril. kateta}}$$

$$\text{ctan}\,\alpha = \frac{\text{pril. kateta}}{\text{naspr. kateta}}$$



Pregled elementarnih funkcij

Potenčna funkcija
Korenska funkcija
Polinom
Racionalna funkcija
Eksponentna funkcija
Logaritemska funkcija
Kotne funkcije
Ciklometrične funkcije
Hiperbolične funkcije

Definicijsko območje kotnih funkcij sinus in kosinus razširimo na množico vseh realnih števil.

Definicijsko območje funkcije

$$\tan x = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

je množica $\mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Definicijsko območje funkcije

$$\operatorname{ctan} x = \cot x = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

je množica $\mathbb{R} \backslash \{k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Funkciji sinus in kosinus sta periodični s periodo 2π:

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) \quad \text{in} \quad \cos x = \cos(x + 2\pi)$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Funkciji tangens in kotangens sta periodični s periodo π:

$$\tan x = \tan(x + \pi) \quad \text{in} \quad \mathrm{ctan}\, x = \mathrm{ctan}(x + \pi)$$

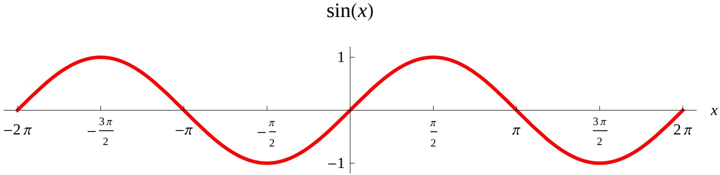
za vsak $x \in \mathbb{R}$.

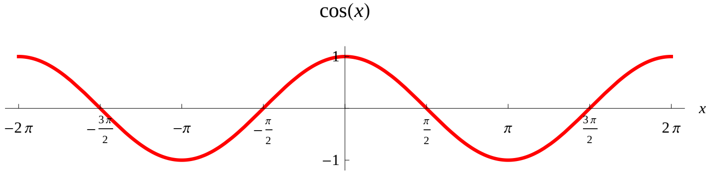
Med kotnimi funkcijami veljajo številne zveze, kot so:

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1, \\
\tan^2 x + 1 &= 1/\cos^2 x, \\
\operatorname{ctan}^2 x + 1 &= 1/\sin^2 x, \\
\tan x \operatorname{ctan} x &= 1, \\
\sin(2x) &= 2\sin x \cos x, \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x, \\
\sin^2 \frac{x}{2} &= \frac{1-\cos x}{2}, \\
\cos^2 \frac{x}{2} &= \frac{1+\cos x}{2}.
\end{aligned}
$$

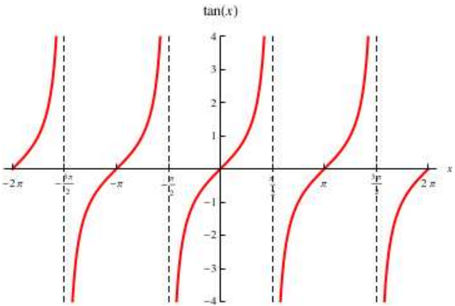
Potenčna funkcija
Korenska funkcija
Polinom
Racionalna funkcija
Eksponentna funkcija
Logaritemska funkcija
Kotne funkcije
Ciklometrične funkcije
Hiperbolične funkcije

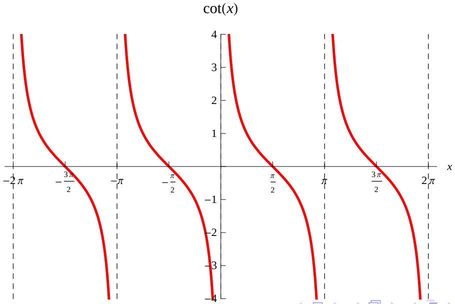
Grafa funkcij sinus in kosinus:





Grafa funkcij tangens in kotangens:





Pregled elementarnih funkcij

Potenčna funkcija

Korenska funkcija

Polinom

Racionalna funkcija

Eksponentna funkcija

Logaritemska funkcija

Kotne funkcije

Ciklometrične funkcije

Hiperbolične funkcije

Ciklometrične funkcije

Kotne funkcije niso injektivne, zato inverzne funkcije kotnih funkcij ne obstajajo.

Če pa se omejimo na območje, kjer je posamezna kotna funkcija injektivna, lahko definiramo inverze zoženih kotnih funkcij. Te inverze imenujemo **ciklometrične funkcije**.

Pregled elementarnih funkcij

Potenčna funkcija

Korenska funkcija

Polinom

Racionalna funkcija

Eksponentna funkcija

Logaritemska funkcija

Kotne funkcije

Ciklometrične funkcije

Hiperbolične funkcije

Pri sinusni funkciji se omejimo na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Inverzno oziroma ciklometrično funkcijo te zožene sinusne funkcije imenujemo **arkus sinus** in pišemo

$$f(x) = \arcsin x.$$

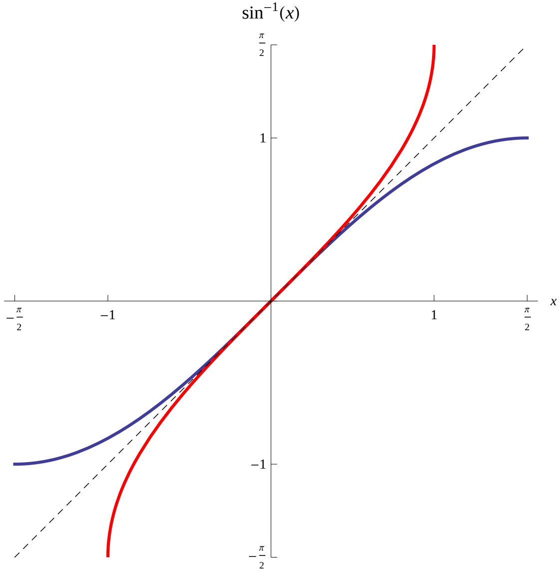
Velja:

$$y = \arcsin x \iff \sin y = x.$$

Definicijsko območje funkcije arkus sinus je $[-1, 1]$, njena zaloga vrednosti pa $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Potenčna funkcija
Korenska funkcija
Polinom
Racionalna funkcija
Eksponentna funkcija
Logaritemska funkcija
Kotne funkcije
Ciklometrične funkcije
Hiperbolične funkcije

Graf funkcije arkus sinus



Pri kosinusni funkciji se omejimo na interval $[0, \pi]$. Inverzno oziroma ciklometrično funkcijo te zožene kosinusne funkcije imenujemo **arkus kosinus** in pišemo

$$f(x) = \arccos x.$$

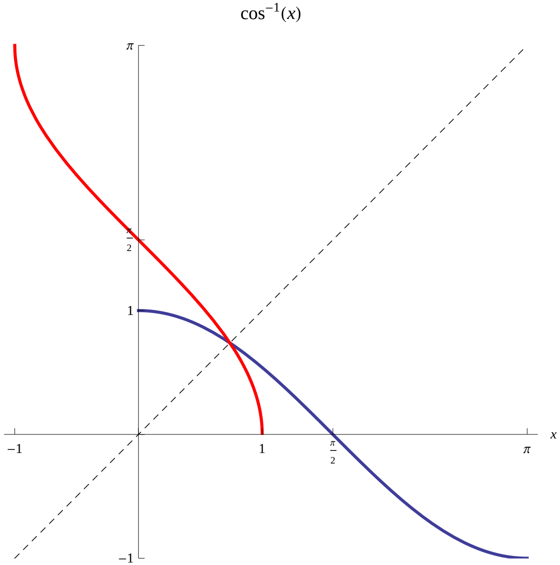
Velja:

$$y = \arccos x \iff \cos y = x.$$

Definicijsko območje funkcije arkus kosinus je $[-1, 1]$, njena zaloga vrednosti pa $[0, \pi]$.

Potenčna funkcija
Korenska funkcija
Polinom
Racionalna funkcija
Eksponentna funkcija
Logaritemska funkcija
Kotne funkcije
Ciklometrične funkcije
Hiperbolične funkcije

Graf funkcije arkus kosinus



Pregled elementarnih funkcij

Potenčna funkcija

Korenska funkcija

Polinom

Racionalna funkcija

Eksponentna funkcija

Logaritemska funkcija

Kotne funkcije

Ciklometrične funkcije

Hiperbolične funkcije

Pri funkciji tangens se omejimo na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Inverzno oziroma ciklometrično funkcijo tako zožene funkcije tangens imenujemo **arkus tangens** in pišemo

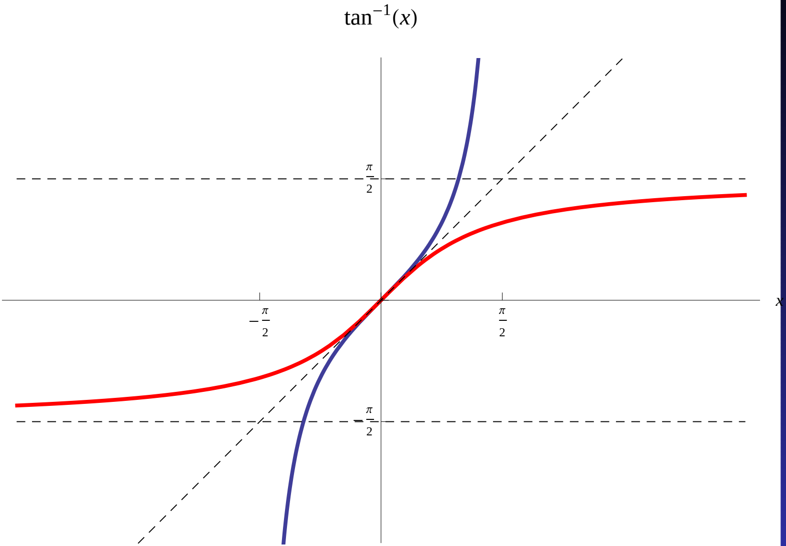
$$f(x) = \arctan x.$$

Velja:

$$y = \arctan x \iff \tan y = x.$$

Definicijsko območje funkcije arkus tangens je $\mathbb{R}$, njena zaloga vrednosti pa $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Graf funkcije arkus tangens



Potenčna funkcija
Korenska funkcija
Polinom
Racionalna funkcija
Eksponentna funkcija
Logaritemska funkcija
Kotne funkcije
Ciklometrične funkcije
Hiperbolične funkcije

Pri funkciji kotangens se omejimo na interval $[0, \pi]$. Inverzno oziroma ciklometrično funkcijo tako zožene funkcije kotangens imenujemo **arkus kotangens** in pišemo

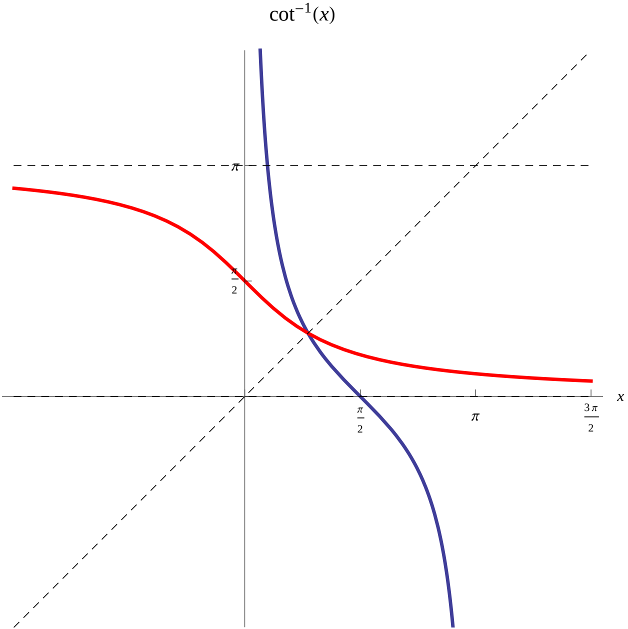
$$f(x) = \operatorname{arcctan} x.$$

Velja:

$$y = \operatorname{arcctan} x \iff \operatorname{ctan} y = x.$$

Definicijsko območje funkcije arkus kotangens je $\mathbb{R}$, njena zaloga vrednosti pa $[0, \pi]$.

Graf funkcije arkus kotangens



Hiperbolične funkcije

To je skupno ime za funkcije **hiperbolični sinus**, **hiperbolični kosinus**, **hiperbolični tangens** in **hiperbolični kotangens**, ki so definirane takole:

$$\operatorname{sh} x = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{ch} x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

$$\operatorname{cth} x = \operatorname{ctanh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

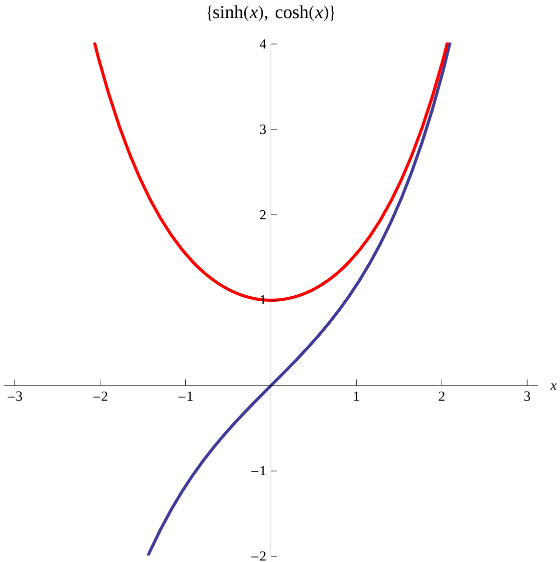
Potenčna funkcija
Korenska funkcija
Polinom
Racionalna funkcija
Eksponentna funkcija
Logaritemska funkcija
Kotne funkcije
Ciklometrične funkcije
Hiperbolične funkcije

Za hiperbolične funkcije veljajo podobne zveze kot za kotne funkcije, na primer

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, \\ \sinh(2x) &= 2\sinh x \cosh x, \\ \cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x. \end{aligned}$$

Inverzne funkcije hiperboličnih funkcij imenujemo **area funkcije**.

Grafa funkcij hiperbolični sinus in kosinus:



Pregled elementarnih funkcij

Potenčna funkcija

Korenska funkcija

Polinom

Racionalna funkcija

Eksponentna funkcija

Logaritemska funkcija

Kotne funkcije

Ciklometrične funkcije

Hiperbolične funkcije