Matematika 1

1. vaja

B. Jurčič Zlobec[1]

[1] Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za Elektrotehniko
1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenija

Matematika 1 FE, Ljubljana, Slovenija 23. oktober 2012

Absolutna vrednost in kvadratni koren

- Absolutna vrednost.

$$|x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$$

- Kvadratni koren $y = \sqrt{x}$ je definiran za nenegativne vrednosti in zavzame nenegativne vrednosti.
- Kvadratni koren je strogo naraščajoča funkcija.
- Velja $\sqrt{x^2} = |x|$.

Intervali in poltraki

Vzemimo, da sta a in b dve realni števili, za kateri velja $a < b$.

- Odprt interval $(a, b) = \{x, a < x < b\}$.
- Zaprt interval $[a, b] = \{x, a \leq x \leq b\}$.
- Polodprt interval oziroma polzaprt interval $[a, b)$ in $(a, b]$.
- Desni odprt in zaprt poltrak $(a, \infty) = \{x, x > a\}$ in $[a, \infty) = \{x, x \geq a\}$.
- Levi odprt in zaprt poltrak $(-\infty, a)$ in $(-\infty, a]$.

Splošno

- Linearno neenačbo z eno neznanko lahko vedno prevedemo na obliko $ax < b$ ali $ax \leq b$.
- Ko množimo z negativno vrednostjo se smer neenačaja obrne.
- Množica rešitev leži na poltraku:

$$\begin{cases} x > \frac{b}{a}, a < 0 \\ x < \frac{b}{a}, a > 0 \end{cases} \quad \text{oziroma} \quad \begin{cases} x \geq \frac{b}{a}, a < 0 \\ x \leq \frac{b}{a}, a > 0 \end{cases}$$

Množica: $X = \{x, 6x - 1 > 2x + 3\}$

- Neenačba: $6x - 1 > 2x + 3$.
- Odštejemo $2x$ in prištejemo 1 na obeh straneh $6x - 2x < 3 + 1$.
- Dobimo $4x > 4$.
- Delimo s 4 in dobimo $x > 1$.
- Rešitev $X = (1, \infty)$.

Množica: $X = \{x, 2x + 3 \leq 3x + 4\}$

- Neenačba: $2x + 3 \leq 3x + 4$.
- Odštejemo $3x$ in 3 na obeh straneh $2x - 3x \leq 4 - 3$.
- Dobimo $-x \leq 1$.
- Delimo z -1 obrnemo smer neenačaja $x \geq -1$.
- Rešitev $X = [-1, \infty)$.

Množica: $X = \{x, 2x + 3 \leq 3x + 4 < x + 7\}$

- Sistem neenačb $2x + 3 \leq 3x + 4 \wedge 3x + 4 < x + 7$.
- Poenostavimo $-x \leq 1 \wedge 2x < 3$.
- Dobimo $[-1, \infty) \cap (-\infty, \frac{3}{2})$.
- Rešitev $X = [-1, \frac{3}{2})$.

Splošno

- Kvadratne neenačbe z eno neznanko lahko prevedemo na obliko $ax^2 + bx + c > 0$, oziroma $ax^2 + bx + c \geq 0$.
- Primer ko je diskriminanta negativna, $b^2 - 4ac < 0$.
  - Če je $a > 0$, neenačbo jo reši vsako realno število, $(-\infty, \infty)$
  - Če je $a < 0$, neenačba nima rešitev, $\emptyset$.
- Primer ko je diskriminanta pozitivna $b^2 - 4ac > 0$. Enačba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dve rešitvi $x_1 < x_2$. V primeru strogega enačaja dobimo:
  - Če je $a > 0$, rešitve ležijo na $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.
  - Če je $a < 0$, rešitve ležijo na (x_1, x_2).

Množica: $X = \{x, x + \frac{1}{x} \leq 2\}$

- Nič ni element množice, $x \neq 0$.
- Za $x < 0$ je

$$x^2 + 1 \geq 2x \to x^2 - 2x + 1 \geq 0 \to x \in (-\infty, 0).$$

- Za $x > 0$ je

$$x^2 + 1 \leq 2x \to x^2 - 2x + 1 \leq 0 \to x \in \{1\}.$$

- Rešitev $X = (-\infty, 0) \cup \{1\}$.

Množica: $X = \{x, x + |x + 1| = 3\}$

- $x + 1 < 0 \to x < -1 \to (-\infty, -1)$,

$$x - (x + 1) = 3, \quad -1 = 3, \to \emptyset$$

- $x + 1 \geq 0 \to x \geq -1 \to [-1, \infty)$,

$$x + (x + 1) = 3, \quad 2x = 2, \to \{1\}$$

- Rešitev $X = \emptyset \cup \{1\}$

Množica: $X = \{x, x + |1 - x| = 0\}$

- $1 - x < 0 \rightarrow -x < -1 \rightarrow (1, \infty)$,

$$x - (1 - x) = 0, \quad 2x = 1, \rightarrow \{\frac{1}{2}\}$$

- $1 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 1 \rightarrow (-\infty, 1]$,

$$x + (1 - x) = 0, \quad 1 = 0, \rightarrow \emptyset$$

- Rešitev $X = \emptyset$,
  $\left((1, \infty) \cap \{\frac{1}{2}\}\right) \cup \left((-\infty, 1] \cap \emptyset\right)$

Množica: $X = \{x, |x+1| + |x-1| = 2\}$

- $x \in (-\infty, -1), -(x+1) - (x-1) = 2, \quad -2x = 2, \rightarrow \{-1\}$
- $x \in [-1, 1], (x+1) - (x-1) = 2, \quad 2 = 2, \rightarrow (-\infty, \infty)$
- $x \in (1, \infty), 2x = 2, \quad x = 1, \rightarrow \{1\}$
- Rešitev $X = [-1, 1]$,
  $(\{-1\} \cap (-\infty, -1)) \cup ([-1, 1] \cap (-\infty, \infty)) \cup ((1, \infty) \cap \{1\})$

Množica: $\{x, |2-x| < 2|x| + 3\}$

- $x \in (-\infty, 0), \quad 2 - x < -2x + 3, \quad x < 1, \to (-\infty, 0),$
- $x \in [0, 2], \quad 2 - x < 2x + 3, \quad x > -\frac{1}{3}, \to [0, 2],$
- $x \in (2, \infty), \quad -2 + x < 2x + 3, \quad x > -5, \to (2, \infty),$
- Rešitev $X = (-\infty, 0) \cup [0, 2] \cup (2, \infty) = (-\infty, \infty),$

Množica: $X = \{|x^3 - x^2| < |x^2 + x|\}$

- Za $x \neq 0$ delimo z $|x|$, $|x^2 - x| < |x + 1|$.
- $x \in (-\infty, -1)$, $x^2 - x < -x - 1 \to x^2 < 1 \to (-1, 1)$,
- $x \in [-1, 0)$, $x^2 - 2x - 1 < 0 \to (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$,
- $x \in (0, 1)$, $-x^2 + x < x + 1 \to -x^2 < 1 \to (-\infty, \infty)$,
- $x \in [1, \infty)$, $x^2 - 2x - 1 < 0 \to (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$,
- Rešitev $X = (1 - \sqrt{2}, 0) \cup (0, 1 + \sqrt{2})$.

Množica: $X = \{x, -\sqrt{x+1} > 3\}$

- S kvadriranjem neenačbe bi dobili napačen rezultat.
- $x + 1 > 9$, $x \in (8, \infty)$.
- Ker je leva stran negativna neenačba nima rešitev.
- Rešitev je prazna množica, $X = \emptyset$.

Množica: $X = \{x, \sqrt{x+1} < 2\}$

- S kvadriranjem neenačbe bi dobili napačen rezultat.
- $x + 1 < 4$, $x \in (-\infty, 3)$.
- Izraz pod korenom negativen za $x < -1$.
- Rešitev je potemtakem množica, $X = [-1, 3)$.

Množica: $X = \{x, \sqrt{x} + \sqrt{x+1} > 3\}$

- Neenačba je definirana samo za $x \geq 0$. Obe strani sta pozitivni, kvadriramo:
  $2\sqrt{x(x+1)} > 8 - 2x \to \sqrt{x(x+1)} > 4 - x$
- Če je desna stran negativna je neenačba izpolnjena, je $x > 4$ del rešitve,
- v nasprotnem primeru pa sta obe strani pozitivni, kvadriramo:
  $x^2 + x > 16 - 8x + x^2 \to x > \frac{16}{9}$
- Rešitev $X = (\frac{16}{9}, \infty)$,
  $(0, \infty) \cap \left((4, \infty) \cup ([-\infty, 4] \cap (\frac{16}{9}, \infty))\right)$.

Množica: $X = \{x, \sqrt{19-x} - \sqrt{x+1} > 2\}$

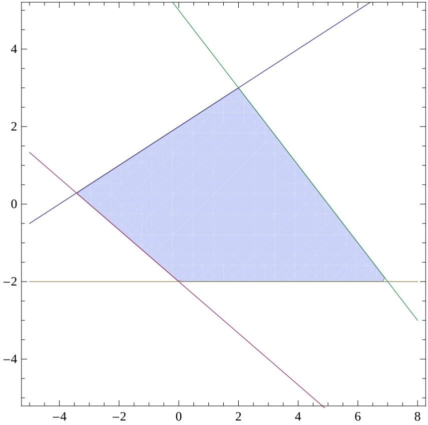
- Neenačba je definirana samo za $x \in [-1, 19]$.
- Če je leva stran negativna neenačba ni izpolnjena, torej se rešitev se nahaja na $\{x, \sqrt{19-x} > \sqrt{x+1}\} = (-\infty, 9)$.
- Na tem intervalu sta obe strani enačbe pozitivni, kvadriramo:
  $\sqrt{(19-x)(x+1)} < 8, \rightarrow x^2 - 18x + 45 > 0 \rightarrow$
  $(-\infty, 3) \cup (15, \infty)$
- Rešitev $X = [-1, 3)$,
  $[-1, 19] \cap (-\infty, 9) \cap ((-\infty, 3) \cup (15, \infty))$

Množica: $X = \{x, \sqrt{5x+1} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{7x-20}\}$

- Neenačba je definirana samo za pozitivne vrednosti pod koreni:
  $x \in [-\frac{-1}{5}, \infty) \cap [-\frac{3}{3}, \infty) \cap [\frac{20}{7}, \infty) = [\frac{20}{7}, \infty)$.
- Kvadriramo lahko le v primeru, če sta obe strani enačbe enakega znaka:
  $\sqrt{5x+1} > \sqrt{2x+3} \to 5x+1 \geq 2x+3 \to x \in [\frac{2}{3}, \infty)$.
- Kvadriramo in dobimo enačbo $10x^2 + 17x - 141 = 0$. Ta ima dve rešitvi $x \in \{-4.7, 3\}$.
- Rešitev $X = \{3\} = \{-4.7, 3\} \cap [\frac{20}{7}, \infty)$.

Grafično predoči množico

$$\{(x,y), x-2y+4 \geq 0 \wedge 2x+3y+6 \geq 0 \wedge y+2 \geq 0 \wedge y+x-5 \leq 0\}$$



Vsote

- Dokaži, da formula $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = f(n)$ velja za vsa naravna števila n.
- Pokažimo za $n = 1$: $a_1 = f(1)$.
- Če velja za n pokažimo, da velja za $n + 1$.
- $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = f(n+1) \to f(n) + a_{n+1} = f(n+1)$.

Dokaži, da velja

- $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1} n = \frac{1}{4}\left(1 + (-1)^{n-1}(2n+1)\right)$.
- Za $n = 1$ dobimo: $1 = \frac{1}{4}(1 + 2 + 1)$.
- Pokazati moramo še enakost:
- $\frac{1}{4}\left(1 + (-1)^{n-1}(2n+1)\right) + (-1)^n(n+1) = \frac{1}{4}(1 + (-1)^n(2n+3))$.

Dokaži, da velja

- $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$
- Za $n = 1$ dobimo: $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$.
- Če n potem $n + 1$. $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$
- $\sqrt{n(n+1)} + 1 \geq n + 1 \to \sqrt{n^2+1} \geq n$.

Vsota kubov 3 zaporednih naravnih števil je deljiva z 9

- $9 | \left(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right)$
- Za $n = 1$ velja $9 | 1 + 8 + 27$.
- Pokazati moramo še, da je razlika
  $\left((n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3\right) -$
  $\left(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right)$
  deljiva s 9 za poljubno naravno število n.
- Razlika je $27 + 27n + 9n^2$ je deljiva z 9.
- Drugi člen v razliki je po indukcijski predpostavki deljiv z 9, potem je tudi člen prvi člen deljiv z 9.

Dokaži, da je $n < 2^n$

- Če $n = 1$, dobimo $1 < 2$.
- Če $n < 2^n$ potem
  $n + 1 < 2^{n+1} \rightarrow n + 1 < 2\,2^n \rightarrow n + 1 < 2^n + 2^n$.
- Na levi je dodano 1 na desni pa 2^n, ker je po indukcijski predpostavki $1 < 2^n$, ostane neenakost izpolnjena.

Dokaži, da je izraz $11^{n+1} + 12^{2n-1}$

deljiv z 133 za vsako naravno število n

- Če $n = 1$, dobimo $11^2 + 12 = 133$.
- Pokažimo, da iz indukcijske predpostavke sledi, da je izraz $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ deljiv z 133.
- Gornji izraz lahko preuredimo takole:

$$\begin{aligned} 11^{n+2} + 12^{2n+1} &= 11\,11^{n+1} + 144\,12^{2n-1} = \\ &= 11\left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right) + 133\,12^{2n-1} \end{aligned}$$

- Izraz v oklepaju je po indukcijski predpostavki deljiv s 133.

Dokaži, da števila $\sqrt{2}$ ne moremo zapisati kot razmerje dveh naravnih števil.

- Dokaz s protislovjem. Vzemimo, da je $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, kjer sta naravni števili m in n tuji, nimata skupnega faktorja.
- Potem je $2 = \frac{m^2}{n^2} \to 2n^2 = m^2$.
- Od tod sledi, da je število m^2 sodo.
- Ker je samo kvadrat sodega števila sodo, potem mora biti število m^2 deljivo s 4.
- Torej ga zapišemo kot $m^2 = 4k \to 2n^2 = 4k \to n^2 = 2k$.
- Od tod sledi, da bi moralo biti tudi število n^2 sodo,
- to pa je v nasprotju s predpostavko, da sta m in n tuji.

Dokaži, da je praštevil neskončno mnogo.

- Vzemimo, da je praštevil končno mnogo, $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
- Poglejmo število $m = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$.
- Če je število m praštevilo, smo prišli do protislovja. Število m je večje od praštevil $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
- Torej število m ni praštevilo, od tod sledi, da ga lahko zapišemo v obliki produkta praštevil.
- V produktu ni nobenega od praštevil $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ostanek pri deljenju je 1.
- Torej mora obstajati vsaj eno praštevilo, ki ni enako številom $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
- Spet pridemo v nasprotje s trditvijo, da so $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vsa praštevila.