Matematika 1

2. vaja

B. Jurčič Zlobec[1]

[1]Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za Elektrotehniko
1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenija

Matematika 1 FE, Ljubljana, Slovenija 25. oktober 2012

Kompleksna števila

- Imaginarna enota i, $i^2 = -1$.
- Kompleksno število $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- Realna in imaginarna komponenta $\Re(z) = a$ in $\Im(z) = b$.
- Absolutna vrednost kompleksnega števila $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Konjugirano kompleksno število $\bar{z} = a - ib$. Velja $z\bar{z} = |z|^2$.

Polarni zapis kompleksnega števila

- Polarni zapis kompleksnega števila $z = a + ib$.

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}, \ \cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \ \sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

- Argument kompleksnega števila $\arg z = \varphi$, $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$.
- Glavna vrednost argumenta $\varphi \in [0, 2\pi)$ ali $\varphi \in (-\pi, \pi]$

Moivrova formula

- Moivrova formula:
- $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + \sin(n\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$.
- $(e^{i\varphi})^n = e^{ni\varphi}$.

Koren kompleksnega števila

- Argument kompleksnega števila ni določen enolično.
- $z = |z|(\cos(\varphi + k2\pi) + i\sin(\varphi + k2\pi) =\to |z|e^{i(\varphi + k2\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Zaradi tega tudi koren kompleksnega števila ni določen enolično.
- Enačba $z = w^n$ ima n različnih rešitev.

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Zapiši kompleksno število v polarni obliki

$z = 5\sqrt{3} + 5i$.

- $\tan\varphi = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- Kompleksno število leži v prvem kvadrantu, $\Re(z) > 0$ in $\Im(z) > 0$.
- $\varphi = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.
- $z = 10\, e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Zapiši kompleksno število v polarni obliki

$z = -2 - 2i$.

- $\tan\varphi = \frac{-2}{-2} = 1$.
- Kompleksno število leži v tretjem kvadrantu, $\Re(z) < 0$ in $\Im(z) < 0$.
- $\varphi = \pi + \arctan 1 = \frac{5\pi}{4}$.
- $z = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Izračunaj

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$$

- $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$
- $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20} = 1024e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Poišči vse rešitve enačbe

$z^4 = -2 + 2i\sqrt{3}$.

- Zapišimo desno stran enačbe v polarni obliki.
- $z^4 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
- $z_k = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2})\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.
- $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + i)$, $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\sqrt{3})$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - i)$ in $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\sqrt{3})$;

Poišči $\Re(w)$ in $\Im(w)$, če je $z = x + iy$ in

$$w = \frac{|z|}{z}$$

- Pomnožimo števec in imenovalec s konjugirano vrednostjo imenovalca.
- $w = \dfrac{|z|\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{\bar{z}}{|z|} = \dfrac{x - iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- $\Re(w) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ in $\Im(w) = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Poišči $\Re(w)$ in $\Im(w)$, če je $z = x + iy$ in

$$w = \frac{z}{1+z}$$

- Pomnožimo števec in imenovalec s konjugirano vrednostjo imenovalca.
- $w = \dfrac{z(\overline{z+1})}{|z+1|^2} = \dfrac{z\bar{z}+z}{|z+1|^2} = \dfrac{x^2+y^2+x+iy}{(x+1)^2+y^2}$
- $\Re(w) = \dfrac{x^2+x+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$ in $\Im(w) = \dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$

Poišči $\Re(w)$ in $\Im(w)$, če je $z = x + iy$ in

$w = z^3$

- Razstavimo po binomski formuli.
- $z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$
- $\Re(w) = x^3 - 3xy^2$ in $\Im(w) = 3x^2y - y^3$

Reši enačbo $z + i\,z^2 = 0$

- Zapišimo enačbo po komponentah $x + i\,y + i\,x^2 - 2xy - i\,y^2 = 0.$
- Izenačimo realno in imaginarno komponento $x - 2xy = 0, \quad y + x^2 - y^2 = 0.$
- Iz prve enačbe sledi: $(x = 0 \vee y = \frac{1}{2})$
- Če je $x = 0$ potem iz druge enačbe dobimo $y - y^2 = 0 \to y = 0 \vee y = 1$
- Če je $y = \frac{1}{2}$, potem iz druge enačbe dobimo $x^2 + \frac{1}{4} = 0$, nima realnih rešitev.
- Rešitvi: $z \in \{0, i\}$.

Reši enačbo $\overline{z} + i\,z^2 = 0$

- Zapišimo enačbo po komponentah
  $x - i\,y + i\,x^2 - 2xy - i\,y^2 = 0.$
- Izenačimo realno in imaginarno komponento
  $x - 2xy = 0, \quad -y + x^2 - y^2 = 0.$
- Iz prve enačbe sledi: $(x = 0 \vee y = \frac{1}{2})$
- Če je $x = 0$ potem iz druge enačbe dobimo
  $y - y^2 = 0 \to y = 0 \vee y = 1$
- Če je $y = \frac{1}{2}$, potem iz druge enačbe dobimo $x^2 - \frac{3}{4} = 0$,
  $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$
- Rešitve: $z \in \{0, i \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\}.$

Reši enačbo $z^2 - \frac{1}{\overline{z}} = 0$

- Rešitev ne more biti enaka 0. Pomnožimo enačbo z $\overline{z}$ in dobimo $z|z|^2 - 1 = 0$
- Zapišimo po komponentah $(x + iy)(x^2 + y^2) = 1$.
- Od to sledi, da je $y = 0 \to x^3 = 1 \to x = 1$
- Rešitev je $z = 1$.

Reši enačbo $i + \frac{1}{z} = 2$

- $\frac{1}{z} = 2 - i$
- $z = \frac{1}{2-i}$
- $z = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + i\frac{1}{5}$

Reši enačbo $z^2 - 3\overline{z}^2 = 10i$

- $z^2 - 3\overline{z}^2 = 10i$
- $(x^2 - y^2 + 2ixy) - 3(x^2 - y^2 - 2ixy) = 10i \rightarrow$
- $-2(x^2 - y^2) + 5ixy = 10i$
- $x^2 - y^2 = 0, \quad 5xy = 10, \rightarrow xy = 2, \quad x = \frac{2}{y} \rightarrow$
- $\frac{4}{y^2} - y^2 = 0, \rightarrow 4 - y^4 = 0,$
- $y = \pm\sqrt{2} \rightarrow,$
- $z_{12} = \pm\sqrt{2}(1 + i).$

Reši enačbo $\overline{z} - iz^2 = 0$

- $\overline{z} - iz^2 = 0,$
- $x - iy - i(x^2 - y^2 + 2ixy) = 0 \rightarrow$
- $2xy + x = 0, \quad -x^2 + y^2 - y = 0,$
- Iz prve enačbe je $x = 0 \vee y = -\frac{1}{2}$.
- Iz druge sledi $z_1 = 0, \quad z_2 = i, \quad z_{34} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

Reši enačbo $|z| + z = 2 + i$

- $\sqrt{x^2 + y^2} + x + i\,y = 2 + i \to y = 1$
- $\sqrt{x^2 + 1} + x = 2$
- $\sqrt{x^2 + 1} = 2 - x \to x < 2.$
- $x^2 + 1 = 4 - 4x + x^2 \to x = \frac{3}{4} < 2$
- Rešitev $z = \frac{3}{4} + i.$

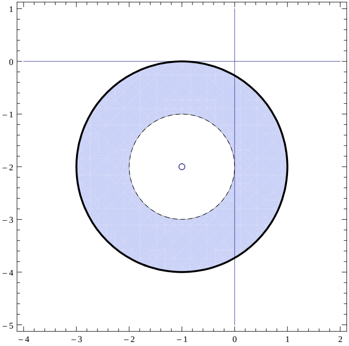
Reši sistem enačb

- $(1+i)z_1 + (2-i)z_2 = i$, $z_1 + (1-i)z_2 = 3$
- Pomnožimo prvo enačbo z $1-i$ in drugo z 2.
- $2z_1 + (-1+3i)z_2 = 1+i$, $2z_1 + 2(1-i)z_2 = 6$
- Obe enačbi odštejemo in izrazimo z_2, $z_2 = \frac{-3-3i}{-3+5i}$;
- Rešitev: $z_1 = 4+5i$, $z_2 = 2-3i$.

Grafično predoči podmnožice kompleksne ravnine

$Z = \{z \in \mathbb{C}, 1 < |z + 1 + 2i| \leq 2\}$

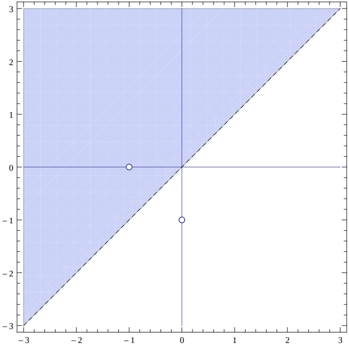
- $1 < |z + 1 + 2i| \leq 2 \rightarrow$
- $1 < |z + 1 + 2i|^2 \leq 4 \rightarrow 1 < (x + 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 4$



Grafično predoči podmnožice kompleksne ravnine

$Z = \{z \in \mathbb{C}, |z+1| < |z+i|\}$

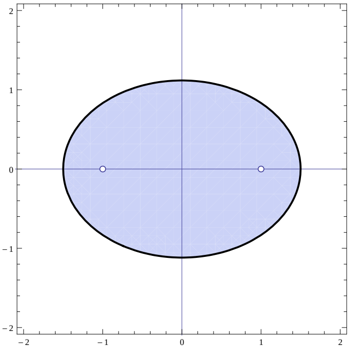
- $|z+1| < |z+i| \to$
- $|z+1|^2 < |z+i|^2 \to (x+1)^2 + y^2 < x^2 + (y+1)^2$.
- $2x+1 < 2y+1 \to x < y$.



Grafično predoči podmnožice kompleksne ravnine

$Z = \{z \in \mathbb{C}, |z+1| + |z-1| \leq 3\}$

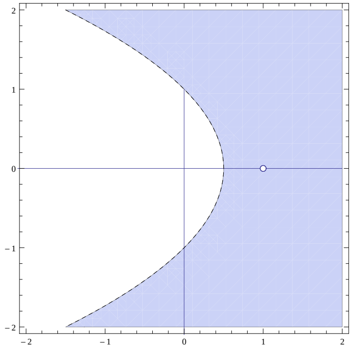
- $|z+1| + |z+i| \leq 3 \rightarrow$
- $\dfrac{4x^2}{9} + \dfrac{4y^2}{5} \leq 1.$



Grafično predoči podmnožice kompleksne ravnine

$Z = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1 - \Re(z)\}$

- $|z| > 1 - \Re(z) \rightarrow$
- $\sqrt{x^2 + y^2} > 1 - x \rightarrow (x > 1)$,
- $x^2 + y^2 > x^2 + 2x + 1 \rightarrow$
- $(x > \frac{1}{2}) \vee ((x \leq \frac{1}{2}) \wedge (y > \sqrt{-2x+1} \vee y < -\sqrt{-2x+1}))$



Ugotovi naraščanje in padanje zaporedja: $a_n = \frac{1}{n+1}$

- Predpostavimo, da je $a_n \leq a_{n+1}$.
  $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+2}, \rightarrow n+2 \leq n+1, \rightarrow 2 \leq 1 \rightarrow \emptyset$
- Od tod sledi $a_n > a_{n+1}$, zaporedje je padajoče.
- Prvi člen je največji $\max\{a_n\} = \frac{1}{2}$.
- Natančna spodnja meja $\inf\{a_n\} = 0$, členi monotono padajo proti nič. Res?
- Pokažimo, da $0 + \epsilon$ ni več spodnja meja za poljuben $\epsilon > 0$.
  $a_n < 0 + \epsilon, \rightarrow \frac{1}{n+1} < \epsilon, \rightarrow n > \frac{1}{\epsilon} - 1$
- Za vsak $\epsilon > 0$ lahko najdemo $n \in \mathbb{N}$, da je gornja neenačba izpolnjena.

Dano je zaporedje: $a_n = -n^2 + 9n + 100$

- Predpostavimo, da je $a_n \leq a_{n+1}$.
  $-n^2 + 9n + 100 \leq -(n+1)^2 + 9(n+1) + 100, \rightarrow$
  $0 \leq -2n + 8, \rightarrow n \leq 4$.
- Za $n = 1, 2, 3$ in 4 velja $a_n < a_{n+1}$, z a vse ostale pa je $a_n > a_{n+1}$.
- Zaporedje narašča do $n = 5$ ($a_4 < a_5$ in $a_5 > a_6$) tu zavzame največjo vrednost, zatem pa monotono pada.
- Največji člen $\max\{a_n\} = 120$. Zaporedje ni navzdol omejeno.

Dano je zaporedje: $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

- Predpostavimo, da je $a_n \leq a_{n+1}$.
  $\frac{n^2}{2^n} \leq \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}, \to n^2 - 2n - 1 \leq 0, \to n \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$.
- Zaporedje narašča do $n = 3$ zatem monotono pada in je navzdol omejeno z nič.
- Natančna spodnja meja zaporedja je 0. Velja:
  $2^n = (1+1)^n > \binom{n}{3}, \to$
  $\frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{\binom{n}{3}} = \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)} = \frac{6}{n(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}$.
  Za velike n desna stran pade pod vsako pozitivno mejo.
- $\max\{a_n\} = \frac{9}{8}$ in $\inf\{a_n\} = 0$

Dano je zaporedje: $a_n = \frac{2^n}{n!}$

- Predpostavimo, da je $a_n \leq a_{n+1}$.
  $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \rightarrow n+1 \leq 2, \rightarrow n \in \{1\}$.
- Zaporedje narašča do $n = 2$ zatem pa monotono pada in je navzdol omejeno z nič.
- Velja ocena, $\frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n}\frac{2}{n-1}\cdots\frac{2}{2}\frac{2}{1} < \frac{4}{n}$,
  Vsi faktorji razen zadnjih dveh so manj kot ena. Natančna spodnja meja enaka 0.
- $\max\{a_n\} = 2$ in $\inf\{a_n\} = 0$.

Dano je zaporedje: $a_n = \frac{n}{1+\left(\frac{n}{10}\right)^2}$

- Predpostavimo, da je $a_n \leq a_{n+1}$. Preuredimo in dobimo neenačbo
  $n^2 + n - 100 \leq 0$
- Rešitev v naravnih številih je $1 \leq n \leq 9$
- Zaporedje do 10 člena narašča, od tam dalje pa monotono pada proti 0.
  Res? Če pišemo $a_n = \frac{1/n}{1/n^2+1/100}$ vidimo, da velja
  $0 < a_n < \frac{100}{n}$).
- Natančna zgornja meja je $\max\{a_n\} = 5$, natančna spodnja meja je $\inf\{a_n\} = 0$.

Dano je zaporedje: $a_n = (-1)^n \frac{2n-1}{3n+1}$

- Zaporedje absolutnih členov $|a_n| = \frac{2n-1}{3n+1}$ ima natančno zgornjo mejo $\frac{2}{3}$.
- Pokažimo, da je razlika $\frac{2}{3} - a_n$ vselej pozitivna in postane poljubno majhna, ko gre n preko vsej meja.
- $\frac{2}{3} - \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{5}{3+9n}$
- Lihi členi zaporedja a_n padajo proti $-\frac{2}{3}$, sodi pa rastejo proti $\frac{2}{3}$.
- Od tod sledi, da je $\sup\{a_n\} = \frac{2}{3}$ in $\inf\{a_n\} = -\frac{2}{3}$.

Dano je zaporedje: $a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{3n-1}$

- Zaporedje absolutnih členov $|a_n| = \frac{2n+1}{3n-1}$ ima natančno spodnjo mejo $\frac{2}{3}$.
- Pokažimo, da je razlika $a_n - \frac{2}{3}$ vselej pozitivna in postane poljubno majhna, ko gre n preko vsej meja.
- $\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3} = \frac{5}{-3+9n}$
- Lihi členi zaporedja a_n rastejo proti $-\frac{2}{3}$, sodi pa padajo proti $\frac{2}{3}$.
- Od tod sledi, da je $\max\{a_n\} = a_2 = 1$ in $\min\{a_n\} = a_1 = -\frac{3}{2}$.

Pravila za računanje z limitami

Če je $A = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad B = \lim_{n\to\infty} b_n$, potem velja

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = A\,B$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$, $a_n \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$

Nekaj osnovnih limit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \text{ če je } a > 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \text{ če je } a > 1 \text{ za vsak } k \in \mathbb{N} \text{ in}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} a_n$,

kjer je $a_n = \frac{n^2+1}{3n^3+2n}$.

- Delimo števec in imenovalec z vodilno potenco n^3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n^2}}$$

- Ker je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ in z upoštevanjem pravil za računanje z limitami $1-4$ na prvi strani, dobimo $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} a_n$,

kjer je $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2+2n}$.

- Delimo števec in imenovalec z vodilno potenco n^2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n}}$$

- Ker je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ in z upoštevanjem pravil za računanje z limitami 1 – 4 na prvi strani, dobimo $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

Izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} a_n$,

kjer je $a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$.

- Izračunajmo vsoto in dobimo $a_n = \frac{n(n+1)}{2n^2}$.
- Delimo števec in imenovalec z vodilno potenco n^2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2}$$

- Ker je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ in z upoštevanjem pravil za računanje z limitami $1-4$ na prvi strani, dobimo $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} a_n$,

kjer je $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{1+2n}$.

- Delimo števec in imenovalec z n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}}$$

- Ker je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ in z upoštevanjem pravil za računanje z limitami 1 – 4 na prvi strani, dobimo $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} a_n$,

kjer je $a_n = \sqrt{2n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

- Pomnožimo števec in imenovalec, ki je enak 1, s konjugirano iracionaliteto izraza v oklepaju, $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

- Vodilna potenca v imenovalcu ($\frac{1}{2}$) je enaka kot v števcu, od tod je:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} a_n$,

kjer je $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$.

- Pomnožimo števec in imenovalec, ki je enak 1, s števcu konjugirano iracionaliteto

$$\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}}$$

- Vodilna potenca v imenovalcu ($\frac{3}{2}$) je večja kot v števcu (0), od tod je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} a_n$

kjer je $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+6}{2n^2+5}\right)^{4n^2+3}$

- Preuredimo izraz tako, da bomo lahko uporabili $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+5}\right)^{2(n^2+5)-7}$
- Pišemo $m = n^2+5$
  $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+5}\right)^{-7}$
- Prva limita je enaka e^2, druga pa je enaka 1.
  $\lim_{n\to\infty} a_n = e^2$

Izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} a_n$

kjer je $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

- Delimo števec in imenovalec z 3^n in upoštevamo, da je:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \quad |q| < 1$$

- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$
- Ker je $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, je $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

Izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} a_n$,

kjer je $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$

- Ker je $-\frac{1}{n} < \frac{\sin n}{n} < \frac{1}{n}$, je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

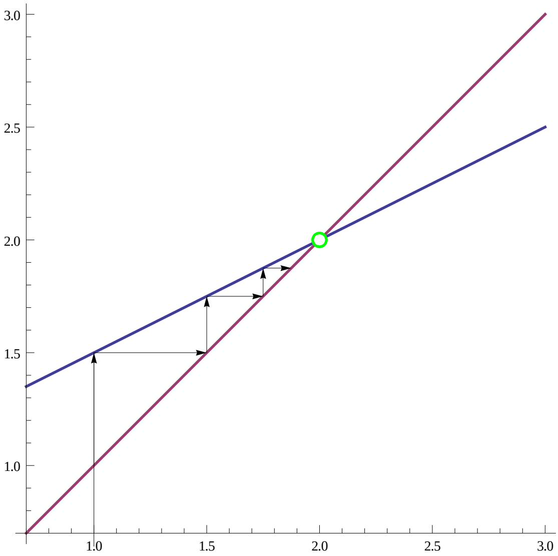
Rekurzivno podano zaporedje:

$a_1 = 1$ in $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + 1$.

Če je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, potem je limita natančna zgornja meja.

- Če je zaporedje monotono naraščajoče, potem je $a_{n+1} > a_n$.
- Od tod je $\dfrac{a_n}{2} + 1 > a_n \iff a_n < 2$.
- Dokazati moramo, da je $a_n < 2$. Uporabimo matematično indukcijo.
- Velja $a_1 = 1 < 2$, če je $a_n < 2$ je tudi $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + 1 < 2$.
- Limita ustreza enačbi $a = \dfrac{a}{2} + 1$, kjer je $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
- Rešitev enačbe je $a = 2$.

Slika k prejšnji nalogi



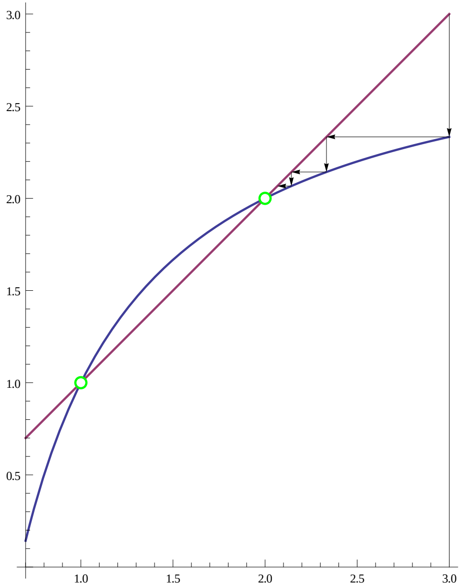
Rekurzivno podano zaporedje:

$a_1 = 3$ in $a_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{a_n}$.

Če je zaporedje monotono padajoče in navzdol omejeno, potem je limita natančna spodnja meja.

- Če je zaporedje monotono padajoče, potem je $a_{n+1} < a_n$.
- Od tod je $3 - \dfrac{2}{a_n} > a_n \iff a_n > 2$.
- Dokazati moramo, da je $a_n > 2$. Uporabimo matematično indukcijo.
- Velja $a_1 = 3 > 2$, če je $a_n > 2$ je tudi $a_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{a_n} > 2$.
- Limita ustreza enačbi $a = 3 - \dfrac{2}{a}$ ali $a^2 - 3a + 2 = 0$, kjer je $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.
- Rešitev enačbe je $a = 1$ in $a = 2$, prava rešitev je druga.

Slika k prejšnji nalogi



Dano je konvergentno zaporedje $\{a_n\}$ in $\epsilon > 0$

Od katerega člena dalje se členi zaporedja razlikujejo od limite za manj kot ϵ, če je $a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1}$ in $\epsilon = \frac{1}{10}$.

- Velja $a_n > 1$.
- Poiščimo $N(\epsilon)$ za katerega velja $\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1 < \epsilon$ za vsak $n > N(\epsilon)$.
- $n - 1 < (1 + n^2)\epsilon \to \epsilon n^2 - n + 1 + \epsilon > 0 \to n > 5 + \sqrt{14}$.
- Od tod sledi, da je $N(\frac{1}{10}) = 8$.

Dano je konvergentno zaporedje $\{a_n\}$ in $\epsilon > 0$

Od katerega člena dalje se členi zaporedja razlikujejo od limite za manj kot ϵ, če je $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ in $\epsilon = \frac{1}{100}$.

- Členi monotono padajo proti nič.
- Poiščimo $N(\epsilon)$ za katerega velja $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \epsilon$ za vsak $n > N(\epsilon)$.
- $n \ln \frac{2}{3} < \ln \epsilon \to n \ln \frac{3}{2} > \ln \frac{1}{\epsilon} \to n > \frac{\ln 100}{\ln(3/2)}$.
- Od tod sledi, da je $N(\frac{1}{100}) = 11$.

Dano je konvergentno zaporedje $\{a_n\}$ in $\epsilon > 0$

Od katerega člena dalje se členi zaporedja razlikujejo od limite za manj kot ϵ, če je $a_n = \frac{5^n+1}{5^n+2}$ in $\epsilon = 25^{-25}$.

- Členi monotono rastejo proti 1.
- Poiščimo $N(\epsilon)$ za katerega velja $1 - \frac{5^n+1}{5^n+2} < \epsilon$ za vsak $n > N(\epsilon)$.
- $5^n > 5^{50} - 2 \rightarrow n > 49$.
- Od tod sledi, da je $N(25^{-25}) = 49$.

Izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} a_n$,

$$\text{kjer je } a_n = \underbrace{1 + \sqrt{1 + \cdots \sqrt{1 + \sqrt{2}}}}_{n \quad \text{korenov}}$$

- Zaporedje lahko zapišemo rekurzivno: $a_1 = 1 + \sqrt{2}$, $a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$
- Dokažimo, da je zaporedje naraščajoče. $a_n < a_{n+1} \to a_n < 1 + \sqrt{a_n} \to a_n^2 - 3a_n + 1 < 0$
- Od tod dobimo pogoj $a_n < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, ki ga dokažemo s pomočjo matematične indukcije.
- Zaporedje je navzgor omejeno z $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
- Limita je ena od rešitev enačbe $a = 1 + \sqrt{a}$.
- Prava je $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Fibonaccijevo zaporedje: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n > 2$

Pokaži, da je limita $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ enaka razmerju zlatega reza.

- Zaporedje $\varphi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ zapišemo v rekurzivni obliki.
- $\varphi_1 = 1$, $\varphi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\varphi_n}$, res?
  $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} \to \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}+F_n}{F_{n+1}}$.
- Pokazati moramo neenačbi $0 < \varphi_{2n-1} < \varphi < \varphi_{2n}$, kjer je φ pozitivna rešitev enačbe,
- $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \to \varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \to \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- tako, da dokažemo implikaciji
  $\varphi_{2n-1} < \varphi \Rightarrow \varphi_{2n+1} < \varphi$ in $\varphi_{2n} > \varphi \Rightarrow \varphi_{2n+2} > \varphi$.

Izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} a_n$,

kjer je $$a_n = \underbrace{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots + \cfrac{1}{1+0}}}}_{n-1 \quad \text{ulomkov}}$$

- Zaporedje lahko zapišemo rekurzivno: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$
- Od tod sledi, da je zaporedje a_n enako zaporedju φ_n prejšnje naloge.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.