Matematika 1

3. vaja

B. Jurčič Zlobec[1]

[1] Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za Elektrotehniko
1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenija

Matematika FE, Ljubljana, Slovenija 2011

Določi stekališča zaporedja

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{n-1}{n+1}.$$

- Limita absolutnih členov $|a_n| = \dfrac{n-1}{n+1}$ je enaka 1.
- Od tod sledi, da ima zaporedje a_n dve stekališči, to sta $\{-1, 1\}$.
- Zaporedje lihih členov konvergira k 1, medtem ko zaporedje sodih členov konvergira k -1.

Določi stekališča zaporedja

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}.$$

- Zaporedje sodih in lihih členov konvergira k 0.
- Zaporedje ima eno samo stekališče, ki je tudi limita zaporedja.

Določi stekališča zaporedja

$$a_n = \sin(\frac{n\pi}{4})\frac{2n^2+1}{n^2+1}.$$

- Zaporedje $\frac{2n^2+1}{n^2+1}$ konvergira k 2.
- Členi zaporedja $\sin(\frac{n\pi}{4})$ zavzamejo naslednje vrednosti $\{\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\}$.
- Zatem se začnejo vrednosti ponavljati.
- Množica stekališč zaporedja je enaka $\{-2, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2\}$.

Določi stekališča zaporedja

$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}$.
Za vsak $n > 2$ se v zaporedju nahajajo vsi ulomki $\frac{m}{n}$, kjer $m = 1, 2, \ldots, n-1$.

- Očitno so vrednosti členov tega zaporedja vsi ulomki iz intervala $(0, 1)$. Vsak ulomek se v zaporedju ponovi neskončnokrat.
- Od tod sledi, da je vsak tak ulomek tudi stekališče.
- Ker vsako realno število na intervalu $[0, 1]$, lahko poljubno natančno aproksimiramo s pravimi ulomki, sledi od tod, da je vsako realno število iz $[0, 1]$ stekališče tega zaporedja.

Določi stekališča zaporedja

$$\{\frac{1}{2}.\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{7}{8},\ldots,\frac{1}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n},\ldots\}.$$

- Podzaporedje lihih členov $l_n = \frac{1}{2^n}$ konvergira k 0.
- Podzaporedje sodih členov $s_n = \frac{2^n-1}{2^n}$ konvergira k 1.
- Stekališči zaporedja sta potemtakem $\{0, 1\}$.

Koliko je vsota vrste?

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$$

- Razcepimo splošni člen na parcialne ulomke.
  $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$
- Zapišimo n-to delno vsoto s tako razcepljenimi členi.
  $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$
  $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$
- Vsi členi, razen prvega in zadnjega se paroma uničijo.
  $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$
- Vsota neskončne vrste je enaka limiti delnih vsot.
  $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$

Koliko je vsota vrste?

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k} \right)$$

- Zapišimo n-to delno vsoto:
  $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k} \right)$
  $S_n = \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{4} - \cdots + \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$
- Notranji členi se uničijo, ostanejo le
  $S_n = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$
- Vsota neskončne vrste je enaka limiti delnih vsot.
  $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \sqrt{2} + \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \right)$.
- Izraz, katerega limito računamo, množimo in delimo s konjugirano iracionaliteto $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$ in dobimo $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = 0$.
- Vsota vrste je potemtakem $S = 1 - \sqrt{2}$.

Koliko je vsota vrste?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^{k-1}}$$

- Vrsta je geometrijska, n-to delno vsoto geometrijske vrste izračunamo po formuli $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

  $S_n = 3\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}$
- Izračunamo limito delnih vsot. Upoštevamo, da je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0$.
- Vsota vrste je potemtakem $S = 4$.

Pokaži, da je dolžina Cantorjeve množice enaka 0.

(i) Vzemimo zaprt enotni interval, $[0,1]$. Razdelimo ga na tri enako dolge podintervale in izločimo srednjega brez robnih točk. Po prvem koraku nam ostaneta dva zaprta podintervala $[0,1/3]$ in $[2/3,1]$.

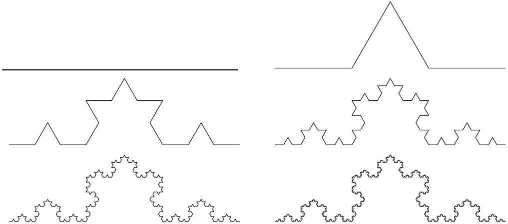
(ii) Nadaljujemo postopek izločanja (i) na vsakem od njih v nedogled.

Cantorjevo množico sestavljajo točke, ki v limiti ostanejo.

- Na začetku je dolžina intervala enaka 1.
- Na vsakem koraku je dolžina izločenih intervalov tretjina predhodnih, njihovo število pa se podvoji.
- Skupna dolžina izločenih intervalov je $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\dots$
- Vsota gornje geometrijske vrste: $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=1$.

Dolžina Kochove krivulje

Kochovo krivuljo konstruiramo takole, kot prikazuje slika:



- Vzemimo, da je dolžina začetne daljice enaka 1.
- Na vsakem koraku se število stranic pomnoži s 4 njihova dolžina pa se skrči za faktor 3.
- Dolžina krivulje po n-tem koraku je enaka $\left(\frac{4}{3}\right)^n$.
- V limiti je dolžina enaka: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$.
- Krivulja neskončne dolžine, ki jo lahko položimo v dlan.

Ploščina pod Kochovo krivuljo, če je dolžina začetne daljice enaka 1.

- Na začetku je ploščina enaka nič.
- Na vsakem koraku se na vsaki stranici doda enakostranični trikotnik, katerega stranice so tretjina prvotne stranice.
- Torej na vsakem koraku dodamo ploščini S_n,
  $S_n = 4^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\frac{\sqrt{3}}{4} = 4^n\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\frac{\sqrt{3}}{16} = \left(\frac{4}{9}\right)^n\frac{\sqrt{3}}{16}$.
- Ploščina je potemtakem enaka $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$.
- Vsota gornje geometrijske vrste je enaka $S = \frac{9\sqrt{3}}{80}$.

Izračunaj vsoto vrste $S = \sum_{n-1}^{\infty} a_n$, če je

$a_n = \dfrac{F_n}{2^n}$, kje F_n n-ti člen Fibonaccijevega zaporedja:
$F_1 = 1$, $F_2 = 1$ in $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

- Vrsto $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{2^n}$ zapišemo takole:
- $S = \frac{F_1}{2} + \frac{F_2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n+2}}{2^{n+2}} \rightarrow$
- $S = \frac{F_1}{2} + \frac{F_2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n+1}+F_n}{2^{n+2}} \rightarrow$
- $S = \frac{F_1}{2} + \frac{F_2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n+1}}{2^{n+2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{2^{n+2}}$
- $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(S - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}S \rightarrow S = 2$

S pomočjo kvocientnega kriterija ugotovi konvergenco vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

- $D_n = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.
- Ker je limita D_n manj kot ena vrsta konvergira.

S pomočjo kvocientnega kriterija ugotovi konvergenco vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}.$$

- $D_n = \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}2^n}$.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e}$.
- Ker je $\frac{2}{e} < 1$ vrsta konvergira.

S pomočjo kvocientnega kriterija ugotovi konvergenco vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}.$$

- $D_n = \frac{3^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}3^n}$.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e}$.
- Ker je $\frac{3}{e} > 1$ vrsta divergira.

S pomočjo korenskega kriterija ugotovi konvergenco vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}.$$

- $C_n = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$
- $\lim_{n\to\infty} C_n = \frac{1}{e}.$
- Ker je limita C_n manj kot ena vrsta konvergira.

S pomočjo korenskega kriterija ugotovi konvergentnco vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}.$$

- $C_n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$
- $\lim_{n\to\infty} C_n = e.$
- Ker je limita C_n več kot ena vrsta divergira.

S pomočjo korenskega kriterija ugotovi konvergenco vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{2k+1}}{k5^k}.$$

- $C_n = \sqrt[n]{\frac{3^2\sqrt[n]{3}}{5\sqrt[n]{n^2}}} = \frac{3^2\sqrt[n]{3}}{5\sqrt[n]{n^2}}.$
- Ker je $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3} = 1$ in $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, je
- limita C_n enaka $\frac{9}{5}$, vrsta divergira.

S pomočjo korenskega kriterija ugotovi konvergenco vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}.$$

- $C_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{2\frac{n+1}{2}2-2}.$
- $\lim_{n\to\infty} C_n = \frac{1}{e^2}.$
- Limita C_n je manj kot 1, vrsta konvergira.

S pomočjo majorante ugotovi konvergenco vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

- Velja $\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)}$.
- Pokazati moramo, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergentna.
- Gornjo vrsto lahko seštejemo. Razbijemo člene na parcialne ulomke in izračunamo delne vsote.
  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
  $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{1+n}$.
- Limita delnih vsot je enaka 1 od tod sledi da vrsta konvergira, torej je tudi prvotna vrsta konvergentna.

S pomočjo majorante ugotovi konvergenco vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

- Ker velja, da je $k^2 < k^3$ za vse $k > 1$, je $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^2}$.
- Ker je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergentna, glej prejšnjo nalogo, sledi, da je prvotna vrsta konvergentna.

S pomočjo minorante ugotovi konvergenco vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

- Pokažimo najprej divergentnost harmonične vrste $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.
- Harmonično vrsto lahko zapišemo kot vsoto $1 + \sum_{k=1}^{\infty} s_k$, kjer je $s_k = \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k}$.
- Za vsak k imajo vsote s_k 2^{k-1} členov. Členi v s_k in s_j se ne prekrivajo, če je $k \neq j$.
- Če nadomestimo vse člene vsote s_k z najmanjšim, zadnjim $\frac{1}{2^k}$, dobimo $\frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}$. Velja $s_k > \frac{1}{2}$ za vsak k. Od tod sledi, da je harmonična vrsta divergentna.
- Ker velja $\sqrt{k} < k$ za vsak $k > 1$ sledi, da tudi prvotna vrsta divergira.

S pomočjo minorante oziroma majorante ugotovi konvergentnco vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1+k^2}.$$

- Velja ocena: $\dfrac{\arctan k}{1+k^2} < \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{1+k^2} < \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{k^2}$.
- Ker konvergira vrsta s členi $\dfrac{1}{k^2}$, konvergira tudi prvotna vrsta.

S pomočjo primerjalnega kriterija ugotovi konvergenco vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2+3k^2}}{1+2k+k^3}.$$

- Vodilna potenca v ševcu je $p = 1$ v imenovalcu pa $q = 3$.
- Izberemo primerjalno vrsto s členi $k^{p-q} = \frac{1}{k^2}$.
- Limita kvocienta členov obeh vrst $\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{(2+3k^2)}k^2}{1+2k+k^3}$.
- Delimo števec in imenovalec z vodilno potenco 3:
  $\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{(\frac{2}{k^2}+3)}}{\frac{1}{n^3}+2\frac{1}{k^2}+1} = \sqrt{3}$.
- Limita zaporedja je različna od nič in končna, torej obe vrsti hkrati konvergirata in divergirata. Ker primerjalna vrsta konvergira, konvergira tudi prvotna vrsta.

Ugotovi konvergenco alternirajoče vrste $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

- Zaporedje absolutnih členov $\frac{1}{\sqrt{k}}$ monotono pada proti nič.
- Od tod sledi, da je vrsta konvergentna.
- Ker vrsta absolutnih členov ne konvergira je konvergenca vrste le pogojna.

Ugotovi konvergenco alternirajoče vrste $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$.

- Zaporedje absolutnih členov $\frac{1}{k(k+1)}$ monotono pada proti nič.
- Od tod sledi, da je vrsta konvergentna.
- Vrsta absolutnih členov je tudi konvergentna
- sledi, da je vrsta absolutno konvergentna.

Ugotovi konvergenco alternirajoče vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^k}{k}-\frac{1+(-1)^k}{2^k}\right).$$

- Zaporedje absolutnih členov vrste pada proti nič, vendar ne monotono.
- Vrsta z lihimi členi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2k-1}$ divergira.
- Vrsta s sodimi členi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{2^{2k-1}}$ absolutno konvergira.
- Od tod sledi, da vrsta divergira.

Definicijsko območje funkcije $f(x)$

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-1}$$

- Funkcija je definirana povsod razen v točkah kjer se imenovalec enak 0.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, 2x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

Definicijsko območje funkcije $f(x)$

$f(x) = \sqrt{1-2x}$

- Funkcija je definirana na območju, ker je izraz pod korenom nenegativen.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, 2x - 1 \geq 0\} = (-\infty, \frac{1}{2}]$

Definicijsko območje funkcije $f(x)$

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{1}{x}$$

- Funkcija je definirana na območju, kjer je izraz pod korenom nenegativen in imenovalec v drugem členu različen od nič.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, 4 - x^2 \geq 0 \wedge x \neq 0\} = (-2, 0) \cup (0, 2)$

Definicijsko območje funkcije $f(x)$

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{2x-1} - x}$$

- Funkcija je definirana na območju, kjer so izrazi pod koreni nenegativni.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, 2x - 1 \geq 0 \wedge \sqrt{2x-1} \geq x\}$
- $\mathcal{D}_f = [\frac{1}{2}, \infty) \cap \{x \in \mathbb{R}, 0 \geq x^2 - 2x + 1\} = \{1\}$.

Definicijsko območje funkcije $f(x)$

$f(x) = \sqrt{\sqrt{2x-1}+x}$

- Funkcija je definirana območju, kjer so izrazi pod koreni nenegativni.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x \geq \frac{1}{2} \wedge \sqrt{2x-1}+x \geq 0\}$
- Tam ker je izpolnjen prvi pogoj, je izpolnjen tudi drugi. $\mathcal{D}_f = [\frac{1}{2}, \infty)$.

Definicijsko območje funkcije $f(x)$

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{2x-1} - \frac{x}{2}}$$

- Funkcija je definirana območju, kjer so izrazi pod koreni nenegativni.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x \geq \frac{1}{2} \wedge 2x - 1 \geq \frac{x^2}{4}\}$
- Pogoja sta izpolnjena na $[4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}]$, ker je $4 - 2\sqrt{3} > \frac{1}{2}$.
- $\mathcal{D}_f = [4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}]$,

Definicijsko območje funkcije $f(x)$

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{2x-1} + x}$$

- Funkcija je definirana območju, kjer so izrazi pod koreni nenegativni.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x \geq \frac{1}{2} \wedge \sqrt{2x-1} \geq -x\}$
- Drugi pogoj izpolnjen na prazno, ker je $x \geq \frac{1}{2}$.
- $\mathcal{D}_f = [\frac{1}{2}, \infty)$,

Definicijsko območje funkcije $f(x)$

$$f(x) = \log \frac{x-1}{x+1}$$

- Funkcija je definirana na območju, kjer je izraz pod logaritmom pozitiven, in imenovalec različen od nič.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, \frac{x-1}{x+1} > 0\}$
- $\mathcal{D}_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Definicijsko območje funkcije $f(x)$

$f(x) = \sqrt{x - |1 - 2x|}$

- Funkcija je definirana na območju, kjer je izraz pod korenom nenegativen.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x > |1 - 2x|\}$
- Za $1 - 2x < 0$ oziroma oziroma $x > \frac{1}{2}$ je $x \geq -1 + 2x$ oziroma $x \leq 1$.
- Za $1 - 2x \geq 0$ oziroma oziroma $x \geq \frac{1}{2}$ je $x \geq 1 - 2x$ oziroma $x \geq \frac{1}{3}$.
- $\mathcal{D}_f = (\frac{1}{2}, 1) \cup (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] = (\frac{1}{3}, 1)$.

Ali lahko rečemo, da sta funkciji $f(x)$ in $g(x)$ enaki?

$f(x) = \log x^2$, $g(x) = 2\log x$

- Definicijsko območje funkcije $f(x)$ je $\mathcal{D}_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Definicijsko območje funkcije $g(x)$ je $\mathcal{D}_g = (0, \infty)$.
- Za pozitivne x je $f(x) = g(x)$, vendar funkciji nista enaki, ker se ne ujemata v definicijskem območju.

Ali lahko rečemo, da sta funkciji $f(x)$ in $g(x)$ enaki?

$$f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}},\ g(x) = \frac{x}{x+1}$$

- Definicijsko območje funkcije $f(x)$ je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.
- Definicijsko območje funkcije $g(x)$ je $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Za $x \notin \{0, -1\}$ je $f(x) = g(x)$, vendar funkciji nista enaki, ker se ne ujemata v definicijskem območju.