Matematika 1

5. vaja

B. Jurčič Zlobec[1]

[1] Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za Elektrotehniko
1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenija

Matematika FE, Ljubljana, Slovenija 2010

Določi limito funkcije $\lim_{x \to x_0} f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}, \quad x_0 = 1.$$

- Faktoriziramo števec in imenovalec: $\lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}$,
- krajšamo skupni faktor in dobimo $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$.

Določi limito funkcije $\lim_{x \to x_0} f(x)$

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad x_0 = 0$$

- Pomnožimo števec in imenovalec v $\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ s konjugirano iracionaliteto:
- $\lim_{x \to 0} \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})}$,
- od tod je $\lim_{x \to 0} \frac{x}{(1+\sqrt{1-x^2})} = 0$.

Določi limito funkcije $\lim_{x\to\infty} f(x)$

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x + 1}$$

- Števec in imenovalec delimo z vodilno potenco x^4.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}$
- $\lim_{x\to\infty f(x)=0}$

Določi limito funkcije $\lim_{x \to \infty} f(x)$

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{2x^3 - 3x + 1}$$

- Števec in imenovalec delimo z vodilno potenco x^3.
- $\lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$
- $\lim_{x \to \infty f(x) = \frac{1}{2}}$

Določi limito funkcije $\lim_{x \to x_0} f(x)$

$$\frac{1}{1+e^{-\frac{1}{x^2}}} \quad x_0 = 0.$$

- Velja $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ in
- $\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$,
- od tod je $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{x^2}}} = 1$

Določi limito funkcije $\lim_{x\to x_0} f(x)$

$$x \sin\frac{1}{x}, \quad x_0 = 0.$$

- Velja $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ za vsak $x \neq 0$,
- od tod velja ocena $-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|$.
- Torej je $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

Določi limito funkcije $\lim_{x\to\infty} f(x)$

$$\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}.$$

- Velja $\lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$
- in $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.
- Torej je $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = -\frac{\pi}{4}$

V točki nezveznosti funkcije $f(x)$ izračunaj levo in desno limito

$$\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

- Velja $\lim_{x\nearrow 0}\frac{1}{x}=-\infty$, $\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x}=\infty$,
- $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ in $\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$.
- Od tod je $\lim_{x\nearrow 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$ in
- $\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$

V točki nezveznosti funkcije $f(x)$ izračunaj levo in desno limito

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{1+x}$$

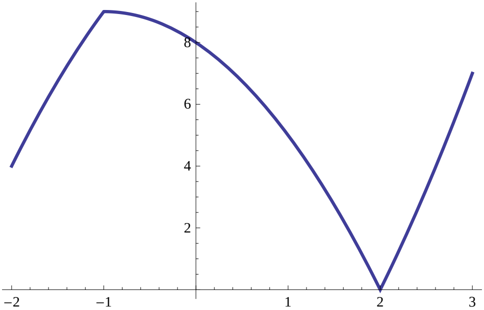
- Velja $\lim_{x \nearrow -1} \frac{x}{x+1} = \infty$, $\lim_{x \searrow -1} \frac{x}{x+1} = -\infty$,
- $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ in $\lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.
- Od tod je $\lim_{x \nearrow -1} \operatorname{arctg} \frac{x}{1+x} = \frac{\pi}{2}$ in
- $\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\operatorname{arctg}} \frac{x}{1+x} = -\frac{\pi}{2}$

Določi parameter a tako, da bo funkcija $f(x)$ povsod zvezna.

$f(x) = \operatorname{sign}(x-2)(x^2 + 2|x+1| + a)$.

- Parameter a moramo izbrati tako, da sta leva in desna limita v točki 2 enaki funkcijski vrednosti v tej točki.
- $f(2) = 0$.
- $\lim_{x \nearrow 2} \operatorname{sign}(x-2)(x^2 + 2|x+1| + a) = \lim_{x \to 2} -(x^2 + 2|x+1| + a) = -10 - a$
- $\lim_{x \searrow 2} \operatorname{sign}(x-2)(x^2 + 2|x+1| + a) = \lim_{x \to 2}(x^2 + 2|x+1| + a) = 10 + a$.
- Od tod sledi, da je $a = -10$.

Graf funkcije $f(x) = \operatorname{sign}(x-2)(x^2+2|x+1|-10)$

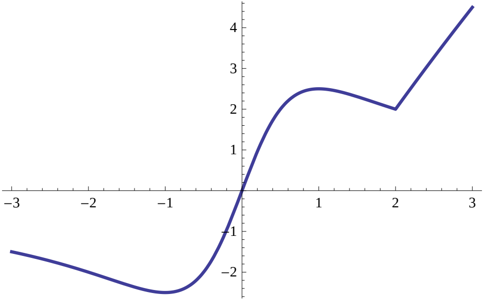


Določi parameter a tako, da bo funkcija $f(x)$ povsod zvezna.

$$f(x) = \operatorname{sign}(x-2)(x + \frac{ax}{1+x^2}) + x.$$

- Parameter a moramo izbrati tako, da sta leva in desna limita v točki 2 enaki funkcijski vrednosti v tej točki.
- $f(2) = 2$.
- $\lim_{x \nearrow 2} \operatorname{sign}(x-2)(x + \frac{ax}{1+x^2}) + x = \lim_{x \to 2} -(x + \frac{ax}{1+x^2}) + x = -\frac{2a}{5}$
- $\lim_{x \searrow 2} \operatorname{sign}(x-2)(x + \frac{ax}{1+x^2}) + x = \lim_{x \to 2}(x + \frac{ax}{1+x^2}) + x = 4 + \frac{2a}{5}$.
- Od tod sledi, da je $a = -5$.

Graf funkcije $f(x) = \operatorname{sign}(x-2)(x - \frac{5x}{1+x^2}) + x$

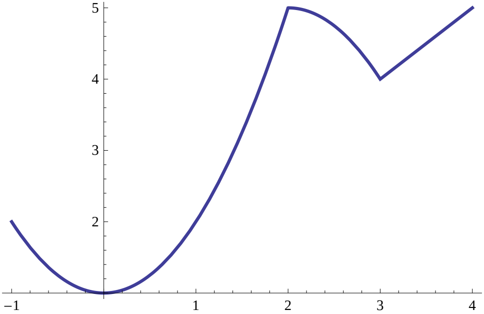


Določi parametra a in b tako, da bo funkcija $f(x)$ povsod zvezna.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, x \le 2 \\ ax^2+bx+1, 2 < x < 3 \\ x+1, x \ge 3 \end{cases}$$

- $\lim_{x \nearrow 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2+1 = 5$
- $\lim_{x \searrow 2} f(x) = \lim_{x \to 2} ax^2+bx+1 = 4a+2b+1$
- $\lim_{x \nearrow 3} f(x) = \lim_{x \to 2} ax^2+bx+1 = 9a+3b+1$
- $\lim_{x \searrow 3} f(x) = \lim_{x \to 2} x+1 = 4$
- Rešimo sistem enačb $4a+2b+1=5$ in $9a+3b+1=4$.
- Rešitev je $a=-1$ in $b=4$.

Graf funkcije $f(x)$ iz prejšne naloge.



Pravila za odvajanje

I $(af(x)+bg(x))' = af'(x)+bg'(x)$, linearnost.

II $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$, produkt.

III $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, kvocient.

IV $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$, posredna funkcija.

V $\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(y)}$, kjer je $x = f(y)$, inverzna funkcija.

Odvodi elementarnih funkcij

1. $(x^n)' = n\,x^{n-1}, (n \in \mathbb{Z}, \quad x \neq 0).$
2. $(x^s)' = s\,x^{s-1}, (s \in \mathbb{R}, \quad x > 0).$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Odvajaj funkcijo $f(x)$.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

- Uporabimo (III) $\to$ (I) $\to$(1).
- $f'(x) = \frac{x'(1+x^2)-x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \to$
- $f'(x) = \frac{x'(1+x^2)-x(1'+x^{2\prime})}{(1+x^2)^2} \to$
- $f'(x) = \frac{(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

Odvajaj funkcijo $f(x)$.

$f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

- Uporabimo (II)$\rightarrow$(2)$\rightarrow$(IV) $\rightarrow$(I)$\rightarrow$(1).
- $f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)' \rightarrow$
- $f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}2x \rightarrow$
- $f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

Odvajaj funkcijo $f(x)$.

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}.$$

- Uporabimo (II)→(2)→(IV) →(III)→(I)→(1).
- $f'(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + x\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right)' \rightarrow \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + x\frac{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'}{2\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \rightarrow$
- $f'(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + x\frac{\left(\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}\right)}{2\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \rightarrow$
- $f'(x) = -\frac{x^4+2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1+x^2)^3}}$

Odvajaj funkcijo $f(x)$.

$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

- Uporabimo (4)→(I)→(IV) →(2)→(I)→(1).
- $f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)' \to$
- $f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \to$
- $f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \to$
- $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Odvajaj funkcijo $f(x)$.

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

- $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)' \to$
- $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Odvajaj funkcijo $f(x)$.

$$f(x) = \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$$

- Uporabimo (I)$\rightarrow$ (III)$\rightarrow$(IV)$\rightarrow$(1) $\rightarrow$(6)$\rightarrow$(5).
- $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{-\sin^3 x - 2\cos^2 x \sin x}{\sin^4 x} \rightarrow$
- $f'(x) = -\frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{2\sin^3 x} \rightarrow$
- $f'(x) = -\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}.$

Odvajaj funkcijo $f(x)$.

$f(x) = ((x^x)^x)^2$

- Poenostavimo $y = x^{2x^2}$.
- Logaritmiramo obe strani $\ln y = 2x^2 \ln x$.
- Odvajamo vsako stran enačbe posebej $\frac{y'}{y} = 4x \ln x + 2x^2 \frac{1}{x} = 4x \ln x + 2x$.
- Pomnožimo z y in dobimo $y' = y(4x \ln x + 2x) \to$
- $f'(x) = x^{2x^2}(4x \ln x + 2x)$.

Odvajaj funkcijo $f(x)$.

$$f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$

- Logaritmiramo obe strani $\ln y = x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.
- Odvajamo vsako stran enačbe posebej $\frac{y'}{y} = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{x+1}{x}\left(\frac{x}{x+1}\right)'$.
- $\frac{y'}{y} = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{x+1}{x}\frac{1}{(x+1)^2} \rightarrow$
- $f'(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x (\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{x^2+x})$.

L'Hôspitalovo pravilo

L'Hôspitalovo pravilo ali tudi Bernoullijevo pravilo:

1. Če sta $\lim_{x\to x_0} f(x)$ in $\lim_{x\to x_0} g(x)$ obe enaki 0 ali $\pm\infty$, kjer je $x_0 \in \mathbb{R}$ ali $x_0 = \pm\infty$, ter
2. obstaja limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,
3. potem velja

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

S pomočjo L'Hôspitalovega pravila izračunaj limito funkcije $f(x)$ v točki x_0.

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ v $x_0 = 0$

- $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ in $\lim_{x\to 0} x = 0$.
- Ker je $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \frac{\cos x}{1} = 1$, potem
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

S pomočjo L'Hôspitalovega pravila izračunaj limito funkcije $f(x)$ v točki x_0.

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} \text{ v } x_0 = 0$$

- $\lim_{x\to 0} 1 - \cos x = 0$ in $\lim_{x^2\to 0} x = 0$.
- Ker je $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$, potem
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

S pomočjo L'Hôspitalovega pravila izračunaj limito funkcije $f(x)$ v točki x_0.

$f(x) = x \ln x$, $x_0 = 0$

- Limito zapišemo v obliki $\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{1/x}$
- $\lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty$ in $\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$.
- $\lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0} -x = 0$,
- $\lim\limits_{x \searrow 0} x \ln x = 0$.

S pomočjo L'Hôspitalovega pravila izračunaj limito funkcije $f(x)$ v točki x_0.

$f(x) = x^x$, $x_0 = 0$

- Logaritmiramo $\ln f(x) = x \ln x$.
- $\lim_{x \searrow 0} \ln f(x) = \lim_{x \searrow 0} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x = e^0 = 1$.

S pomočjo L'Hôspitalovega pravila izračunaj limito funkcije $f(x)$ v točki x_0.

$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x_0 = 0$

- Nadomestimo $t \to \frac{1}{x^2}$.
- Če $x \to 0$, potem $t \to \infty$.
- $\lim_{t\to\infty} te^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = 0$.

S pomočjo L'Hôspitalovega pravila izračunaj limito funkcije $f(x)$ v točki x_0.

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x},\ x_0 = 1$$

- Skupni imenovalec: $f(x) = \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$
- $\lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \to$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\frac{x-1}{x} + \ln x} \to$
- $\lim_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x-1+x\ln x} \to$
- $\lim_{x\to 1} \frac{1+\ln x}{2+\ln x} = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \frac{1}{2}.$

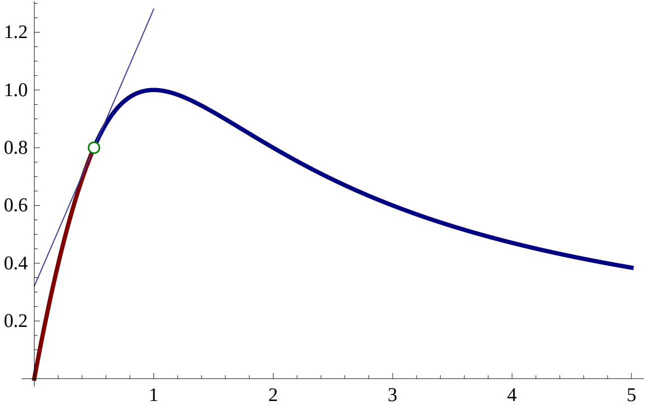
Za dano funkcijo $f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, x < \frac{1}{2} \\ \frac{2x}{1+x^2}, x \geq \frac{1}{2} \end{cases},$$

določi konstanti a in b tako, da bo povsod odvedljiva in zapiši enačbo tangente v točki zlepka.

- Izpolnjeni morajo biti naslednji pogoji: $\lim_{x\nearrow\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\searrow\frac{1}{2}} f(x)$, $\lim_{x\nearrow\frac{1}{2}} f'(x) = \lim_{x\searrow\frac{1}{2}} f'(x)$.
- Enačbi: $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{4}{5}$ in $a + b = \frac{24}{25}$.
- Rešitvi: $a = \frac{56}{25}$, $b = -\frac{32}{25}$.
- Enačba tangente v točki zlepka je $y = \frac{8}{25} + \frac{24}{25}x$.

Grafični prikaz



Za dano funkcijo $f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, x < 2 \\ cx^2 + d, x \geq 2 \end{cases}, \quad f(1) = 1, \quad f(4) = 3,$$

določi konstante a, b c in d tako, da bo povsod odvedljiva in zapiši enačbo tangente v točki zlepka.

- Izpolnjeni morajo biti naslednji pogoji: $f(1) = 1$, $f(4) = 3$, $\lim_{x \nearrow 2} f(x) = \lim_{x \searrow 2} f(x)$, $\lim_{x \nearrow 2} f'(x) = \lim_{x \searrow 2} f'(x)$.
- Enačbe: $a + b = 1$, $16c + d = 3$, $4a + 2b = 4c + d$ in $4a + b = 4c$.
- Rešitve: $a = -(2/11)$, $b = 13/11$, $c = 5/44$ in $d = 13/11$.
- Enačba tangente v točki zlepka je $y = \frac{8}{11} + \frac{5}{11}x$.

Grafični prikaz