Matematika 1

6. vaja

B. Jurčič Zlobec[1]

[1] Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za Elektrotehniko
1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenija

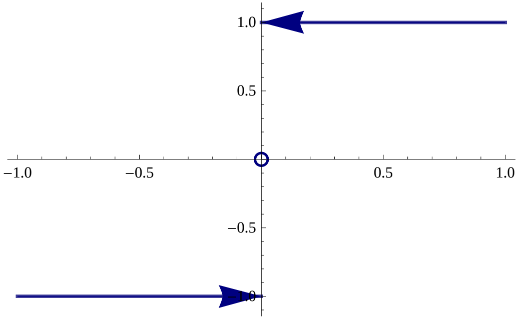
Matematika FE, Ljubljana, Slovenija 2010

Poišči točke, kjer funkcija $f(x)$ ni odvedljiva.

$f(x) = \operatorname{sign} x$.

- Funkcija točki $x = 0$ ni zvezna.
- $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -1$, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 1$ in $f(0) = 0$.
- Leva limita se ne ujema z desno limito in funkcijsko vrednostjo v točki 0.
- Ker funkcija ni zvezna v točki 0 sledi, da tudi ni odvedljiva v tej točki. Povsod drugod je odvod enak 0.

Graf funkcije $f(x)$

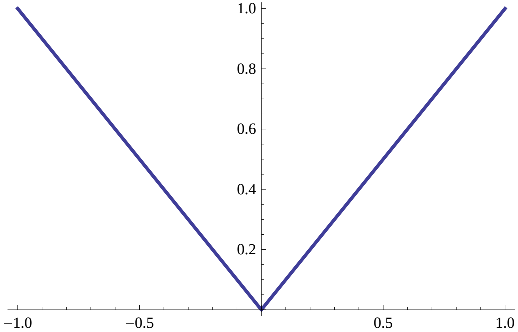


Poišči točke, kjer funkcija f(x) ni odvedljiva.

$f(x) = |x|$.

- Funkcija je povsod zvezna.
- Odvod $f'(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$
- Leva in desna limita odvoda v točki 0 sta različni -1 in 1.
- Od tod sledi, da funkcija v točki 0 ni odvedljiva.
- Lahko pišemo $f'(x) = \operatorname{sign} x$ za $x \neq 0$.

Graf funkcije $f(x)$

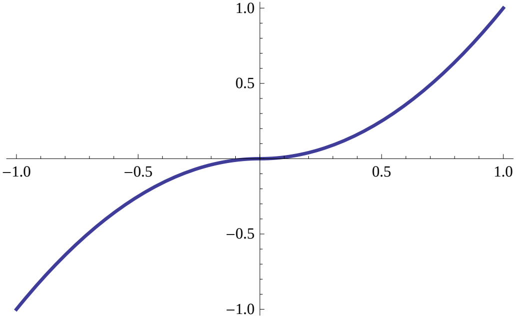


Poišči točke, kjer funkcija f(x) ni odvedljiva.

$f(x) = x|x|$.

- Funkcija je povsod zvezna.
- Funkcijo lahko zapišemo tudi takole: $f(x) = x^2 \operatorname{sign} x$.
- Odvod $f'(x) = 2x \operatorname{sign} x = 2|x|$ za $x \neq 0$.
- Leva in desna limita odvoda v točki 0 sta enaki 0.
- Limita odvoda obstaja, ker je funkcija v tej točki zvezna, je tudi odvedljiva.
- Odvod je $f'(x) = 2|x|$ za vse $x \in \mathbb{R}$.

Graf funkcije $f(x)$

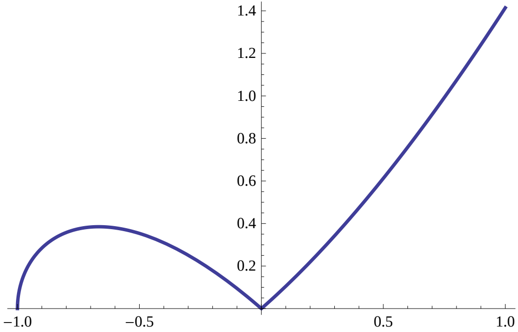


Poišči točke, kjer funkcija f(x) ni odvedljiva.

$f(x) = \sqrt{x^2(1+x)}$.

- Funkcija je definirana in zvezna na $[-1, \infty)$.
- Funkcijo lahko zapišemo takole $f(x) = |x|\sqrt{1+x}$.
- Odvod $f'(x) = \operatorname{sign} x\sqrt{1+x} + \frac{|x|}{2\sqrt{1+x}} \to$
- $\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = -1$ in $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = 1$. Limita odvoda v točki $x = 0$ ne obstaja.
- Funkcija v $x = 0$ ni odvedljiva.
- Ker je $\lim_{x \searrow -1} f'(x) = \infty$ sledi, da funkcija ni odvedljiva tudi v točki $x = -1$.

Graf funkcije $f(x)$

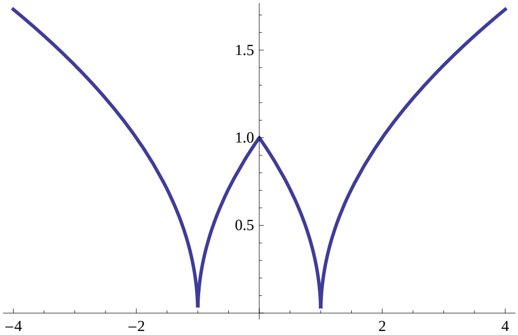


Poišči točke, kjer funkcija f(x) ni odvedljiva.

$f(x) = \sqrt{|1 - |x||}$.

- Funkcija je definirana in zvezna povsod.
- Odvod $f'(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{2\sqrt{1-|x|}}$.
- Limita odvoda v točkah $x = \pm 1$ gre v neskončno, zato v teh dveh točkah ni odvedljiva.
- V točki nič pa je leva limita odvoda enaka $-\frac{1}{2}$, desna limita pa $\frac{1}{2}$, ker sta limiti različni funkcija ni odvedljiva v točki $x = 0$.

Graf funkcije $f(x)$

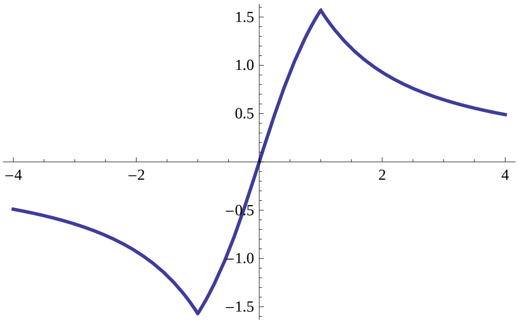


Poišči točke, kjer funkcija f(x) ni odvedljiva.

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

- Funkcija je povsod definirana in zvezna.
- Odvod $f'(x) = \frac{\sqrt{(1-x^2)^2}}{(1-x^2)(1+x^2)} \rightarrow$
- $f'(x) = \frac{\mathrm{sign}(1-x^2)}{1+x^2}$.
- Leva in desna limita odvoda v točkah $x = \pm 1$ se razlikujeta, zato funkcija v teh dveh točkah ni odvedljiva.

Graf funkcije $f(x)$

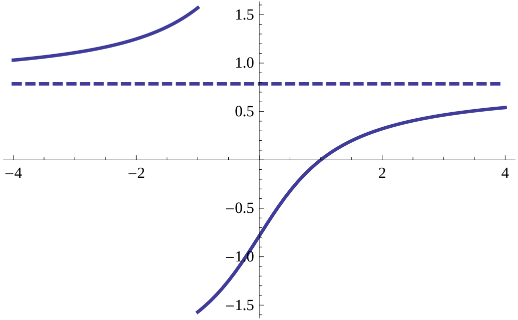


Poišči točke, kjer funkcija f(x) ni odvedljiva.

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}.$$

- Funkcija je definirana in zvezna povsod razen v točki $x = 1$.
- Leva in desna limita v točki $x = 1 \rightarrow$
- $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ in $\lim_{x \searrow 1} f(x) = \frac{\pi}{2}$
- Odvod $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- Leva in desna limita odvoda v točki $x = 1$ se ne razlikujeta, vendar funkcija ni odvedljiva, ker ni zvezna v tej točki.

Graf funkcije $f(x)$



S pomočjo diferenciala določi približno vrednost $\sqrt{80}$.

1. $\sqrt{80} = 9\sqrt{\frac{80}{81}} = 9\sqrt{1 - \frac{1}{81}}$.
2. Upoštevamo, da je $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$, če je $|h| << 1$.
3. V našem primeru je $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ in $h = -\frac{1}{81}$.
4. $\sqrt{1 - \frac{1}{81}} \approx \sqrt{1} - \frac{1}{2}\frac{1}{81} = 0.993827$.
5. $\sqrt{80} \approx 9 \times 0.993827 = 8.94444$.
6. Pet decimalnih mest prave vrednosti je 8.94427.

Kolika je relativna sprememba prostornine krogle, če se polmer podaljša za 1.2 %.

- Prostornina krogle je $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.
- Spremenljivi količini sta V in r.
- Logaritmiramo gornjo enačbo in poiščemo diferencial obeh strani enačbe.
- $\ln V = \ln\frac{4}{3} + 3\ln r \rightarrow \frac{dV}{V} = 3\frac{dr}{r}$.
- Če je relativna sprememba polmera $\frac{dr}{r} = 0.012$ je $\frac{dV}{V} = 0.036$ oziroma 3.6 %.

Določi s pomočjo diferencialov približno spremembo površine kvadrata, s stranicama:

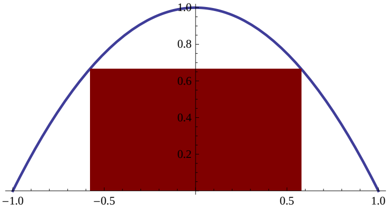
$a = 4$ in $b = 3$, če se stranica a poveča za 0.02 in stranica b pa zmanjša za 0.025.

- Površina kvadrata $S = a\,b$.
- Poiščimo diferencial $dS = (da)\,b + a\,(db)$.
- Od tod sledi, da je $dS = 3\,0.02 - 4\,0.023$.
- Približna sprememba površine je $dS = -0.032$

V lik, ki ga omejujeta graf funkcije $f(x)$ in abscisna os

včrtaj pravokotnik s, stranicami vzporednimi koordinatnim osem tako, da bo ploščina največja. $f(x) = 1 - x^2$.

- Ploščina je enaka $S(x) = x\,(1 - x^2)$, kjer je $x \in [0, 1]$.
- Rešimo enačbo $S'(x) = 0$, oziroma $1 - 3x^2 = 0$ in dobimo $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



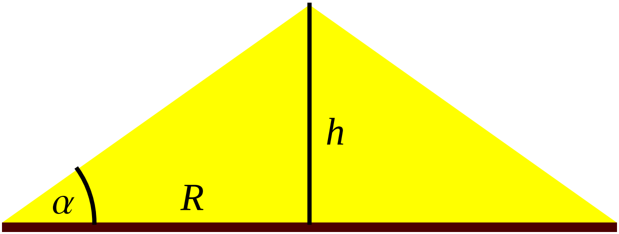
Določi število $x > 0$ tako, da bo vsota $x + \frac{1}{x}$ najmanjša.

- $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
- $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \to f'(x) = 0 \to x = \pm 1$.
- Vzamemo pozitivno rešitev $x = 1$ in določimo naravo stacionarne točke s pomočjo drugega odvoda.
- $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, v $x = 1$ je $f''(1) = 2$.
- Od tod sledi, da v točki $x = 1$ funkcija doseže minimum.

Kako visoko nad sredino okrogle mize s polmerom R moramo postaviti točkasto svetilo, da bo rob najbolje osvetljen.

- Osvetljenost je premo sorazmerna z sinusom vpadnega kota in obratno sorazmerna s kvadratom razdalje od svetila.
- $S(h) = \frac{\sin\alpha}{R^2+h^2} \to \alpha = \operatorname{arctg}\frac{h}{R}$, kjer je h višina svetila.
- $S(h) = \frac{h}{\sqrt{(R^2+h^2)^3}} \to$
- $S'(H) = \frac{R^2-2h^2}{\sqrt{(R^2+h^2)^5}} \to$
- $S'(h) = 0 \to h = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Slika k gornji nalogi



Poišči točko grafa funkcije $f(x)$, ki je najbližja točki T.

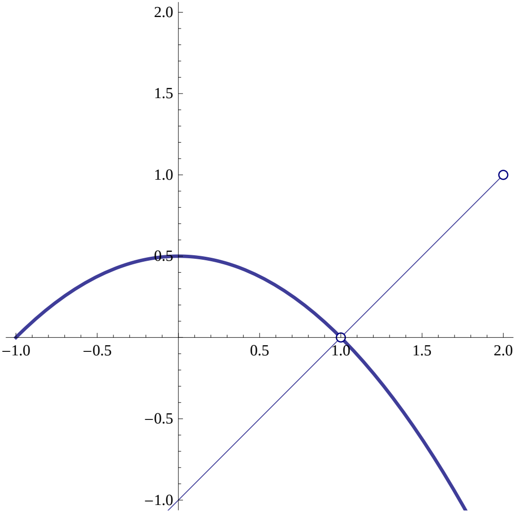
$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2), \quad T = (2, 1).$$

- Skozi točko T položimo normalo na graf $f(x)$.
- Smerni koeficient $k = -\frac{1}{f'(x_0)}$.
- Enačba normale $y - 1 = \frac{1}{x_0}(x - 2)$.
- Poiščimo presečišče normale z grafom $f(x)$.

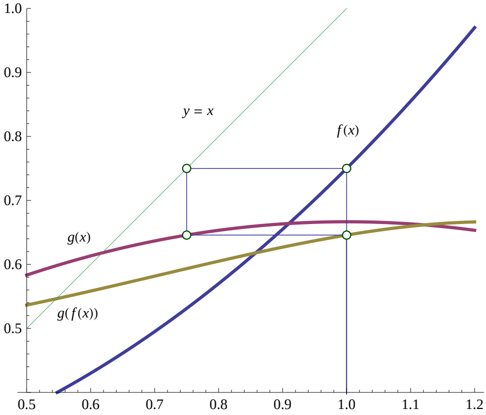
$$\frac{1}{2}(1 - x_0^2) - 1 = \frac{1}{x_0}(x_0 - 2)$$

- Absciso presečišča normale z grafom funkcije $f(x)$ je $x_0 = 1$.
- Najbližja točka je $(x_0, f(x_0)) = (1, 0)$.

Slika k prejšnji nalogi.



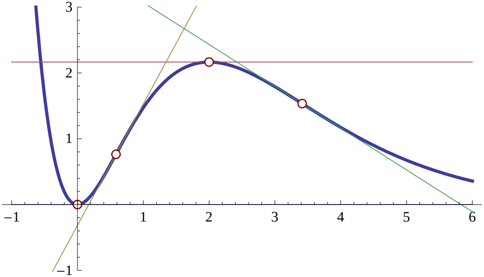
Grafični prikaz kompozicije funkcij



Nariši graf funkcije $f(x)$

$f(x) = x^2 e^{-x}$.

- Ničla v $x_0 = 0$ drugega reda. Limita $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$.
- Odvod $f'(x) = -4e^{-x}x(x-2)$ ima dve ničli v $x_0 = 0$ in $x_1 = 2$.
- Drugi odvod $f''(x) = 4e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$ ima dve ničli v $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$.
- Točki $x_{0,1}$ sta stacionarni, x_0 minimum x_1 maksimum medtem, ko sta $x_{2,3}$ prevojni točki.
- Na $(-\infty, x_0)$ in (x_1, ∞) funkcija pada, $f'(x) < 0$, na (x_0, x_1) funkcija narašča $f'(x) > 0$.
- Na $(-\infty, x_2)$ in (x_3, ∞) je funkcija konveksna $f''(x) > 0$, na (x_2, x_3) je funkcija konkavna $f''(x) < 0$.

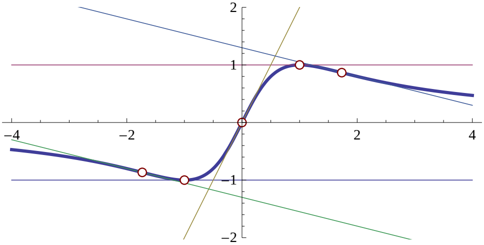

3
2
1
−1
−1
1
2
3
4
5
6

Nariši graf funkcije $f(x)$

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

- Točka $x_0 = 0$ je ničla prvega reda. Limita $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$.
- Odvod $f'(x) = -2\frac{(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$ ima dve ničli v $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$.
- Drugi odvod $f''(x) = 4\frac{x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$ ima tri ničle v $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$ in $x_0 = 0$.
- Točki $x_{1,2}$ sta stacionarni, x_1 minimum x_2 maksimum medtem, ko so $x_{3,4}$ in x_0 prevojne točke.
- Na $(-\infty, x_1)$ in (x_2, ∞) funkcija pada, $f'(x) < 0$, na (x_1, x_2) funkcija narašča $f'(x) > 0$.
- Na $(-\infty, x_3)$ in (x_0, x_3) je funkcija konkavna $f''(x) < 0$, na (x_3, x_0) in (x_4, ∞) je funkcija konveksna $f''(x) > 0$.

Graf funkcije $f(x)$

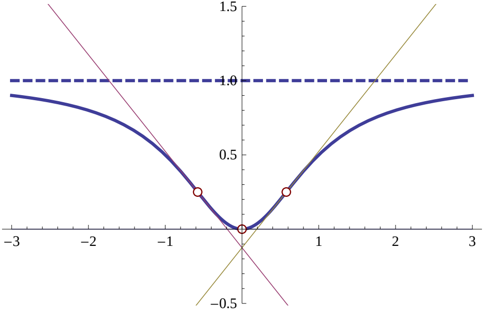


Nariši graf funkcije $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

- Ničla v $x_0 = 0$ drugega reda. Limita $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 1$.
- Odvod $f'(x) = -2\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ima eno ničlo v $x_0 = 0$.
- Drugi odvod $f''(x) = -2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$ dve ničli v $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- Točka x_0 je stacionarna v njej funkcija zavzame minimum medtem, ko sta $x_{1,2}$ prevojni točki.
- Na $(-\infty, x_0)$ funkcija pada, $f'(x) < 0$, na (x_0, ∞) funkcija narašča $f'(x) > 0$.
- Na $(-\infty, x_1)$ in (x_2, ∞) je funkcija konkavna $f''(x) < 0$, na (x_1, x_2) je funkcija konveksna $f''(x) > 0$.

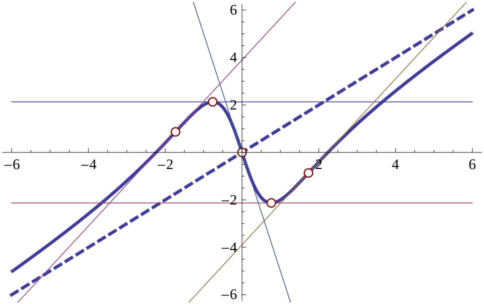
Graf funkcije $f(x)$



Nariši graf funkcije $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x}{x^2 + 1}.$$

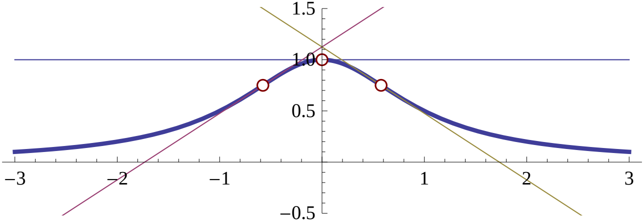
- Ničla v $x_0 = 0$ prvega reda. Poševna asimptota $y = x$.
- Odvod $f'(x) = \frac{x^4 - 8x^2 - 5}{(1+x^2)^2}$ je enak nič v $x_{1,2} = \pm\sqrt{-4 + \sqrt{21}}$.
- $f''(x) = -12\frac{x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$ ima tri ničle v $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$ in $x_0 = 0$.
- Točki $x_{1,2}$ sta stacionarni, x_1 maksimum x_2 minimum medtem, ko so $x_{3,4}$ in x_0 prevojne točke.
- Na $(-\infty, x_1)$ in (x_2, ∞) funkcija narašča, $f'(x) > 0$, na (x_1, x_2) funkcija pada $f'(x) < 0$.
- Na $(-\infty, x_3)$ in (x_0, x_4) je funkcija konveksna $f''(x) > 0$, na (x_3, x_0) in (x_4, ∞) je funkcija konkavna $f''(x) < 0$.


6
4
2
−2
−4
−6
−6
−4
−2
2
4
6

Nariši graf kodra Marie Gaetane Agnesi $\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

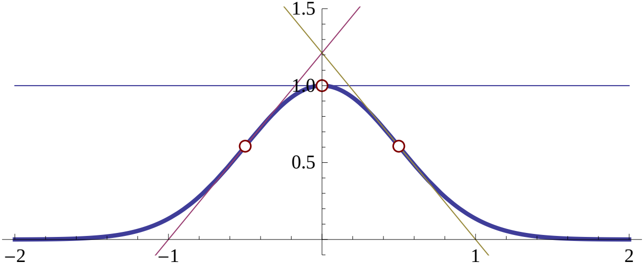
- Ničel in polov nima. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$
- Odvod $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ je enak nič v $x_0 = 0$.
- $f''(x) = 2\frac{-1+3x^2}{(1+x^2)^3}$ ima dve ničli v $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- V točki x_0 doseže maksimum medtem, ko sta $x_{1,2}$ prevojni točki.
- Na $(-\infty, x_0)$ funkcija narašča, $f'(x) > 0$, na (x_0, ∞) funkcija pada $f'(x) < 0$.
- Na $(-\infty, x_1)$ in (x_2, ∞) je funkcija konveksna $f''(x) > 0$, na (x_1, x_2) je funkcija konkavna $f''(x) < 0$.


1.5
1.0
0.5
−0.5
−3
−2
−1
1
2
3

Nariši graf Gaussove funkcije $f(x)$

$f(x) = e^{-2x^2}$.

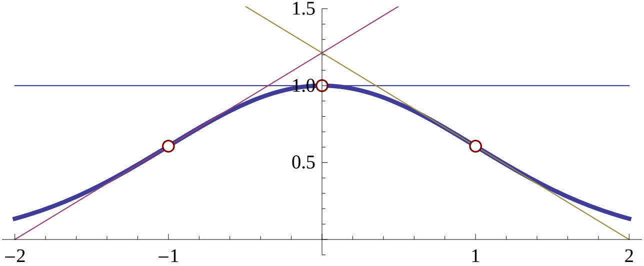
- Odvod $f'(x) = 4xe^{-2x^2}$ je enak nič v $x_0 = 0$.
- $f''(x) = 4(2x^2 - 1)e^{-2x^2}$ ima dve ničli v $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$.
- V točki x_0 doseže maksimum medtem, ko sta $x_{1,2}$ prevojni točki.
- Na $(-\infty, x_0)$ funkcija narašča, $f'(x) > 0$, na (x_0, ∞) funkcija pada $f'(x) < 0$.
- Na $(-\infty, x_1)$ in (x_2, ∞) je funkcija konveksna $f''(x) > 0$, na (x_1, x_2) je funkcija konkavna $f''(x) < 0$.


1.5
1.0
0.5
−2
−1
1
2

Nariši graf Gaussove funkcije $f(x)$

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

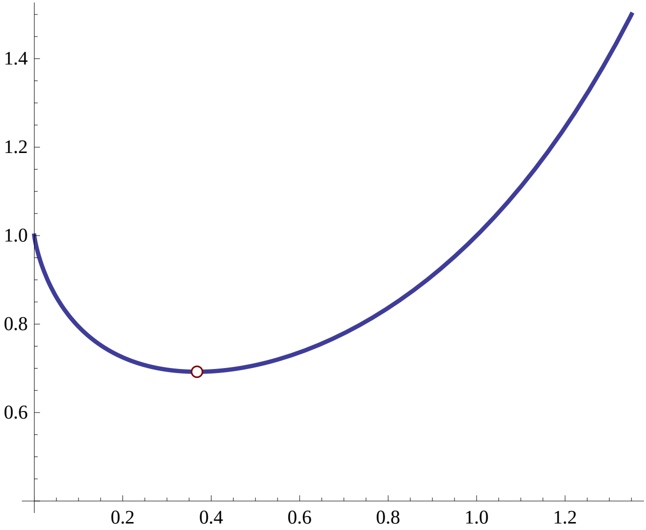
- Odvod $f'(x) = xe^{-x^2/2}$ je enak nič v $x_0 = 0$.
- $f''(x) = (x^2 - 1)e^{-2x^2}$ ima dve ničli v $x_{1,2} = \pm 1$.
- V točki x_0 doseže maksimum medtem, ko sta $x_{1,2}$ prevojni točki.
- Na $(-\infty, x_0)$ funkcija narašča, $f'(x) > 0$, na (x_0, ∞) funkcija pada $f'(x) < 0$.
- Na $(-\infty, x_1)$ in (x_2, ∞) je funkcija konveksna $f''(x) > 0$, na (x_1, x_2) je funkcija konkavna $f''(x) < 0$.


1.5
1.0
0.5
−2
−1
1
2

Nariši graf funkcije $f(x)$.

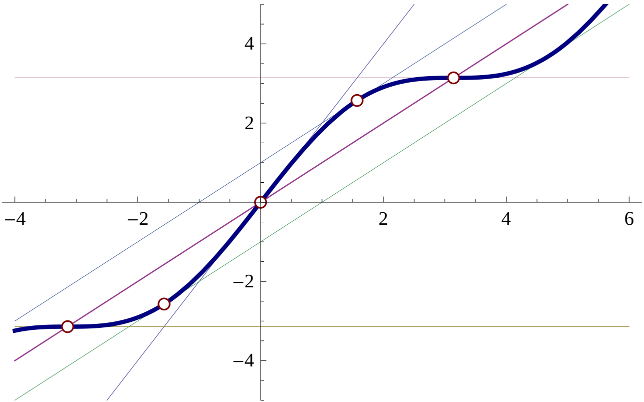
$f(x) = x^x$.

- Funkcija je definirana za $x > 0$.
- $\lim_{x \searrow 0} x^x = 1 \leftarrow \lim_{x \searrow 0} x \log x = 0$.
- Odvod $f'(x) = x^x(1 + \log x) \leftarrow (\log f(x))' = (x \log x)'$.
- Stacionarna točka $1 + \log x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{e}$.
- Funkcija pada $x \in (0, \frac{1}{e}) \leftarrow f'(x) < 0$.
- Funkcija narašča $x \in (\frac{1}{e}, \infty) \leftarrow f'(x) > 0$.
- Drugi odvod $f''(x) = x^x \left((1 + \log x)^2 + \frac{1}{x}\right) > 0$, funkcija je konveksna.


1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2

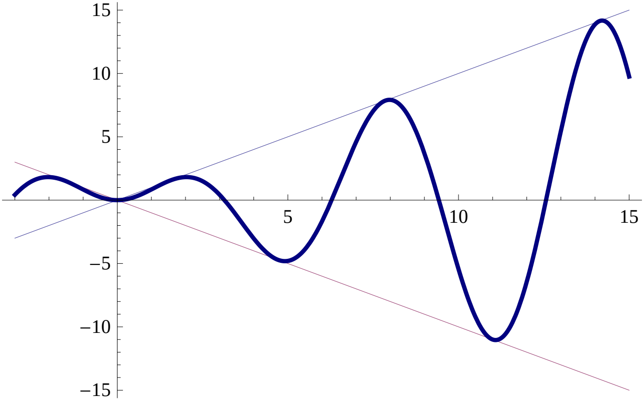
Nariši graf funkcije $f(x)$.

$$f(x) = x + \sin x.$$


4
2
−2
−4
−4
−2
2
4
6

Nariši graf funkcije $f(x)$.

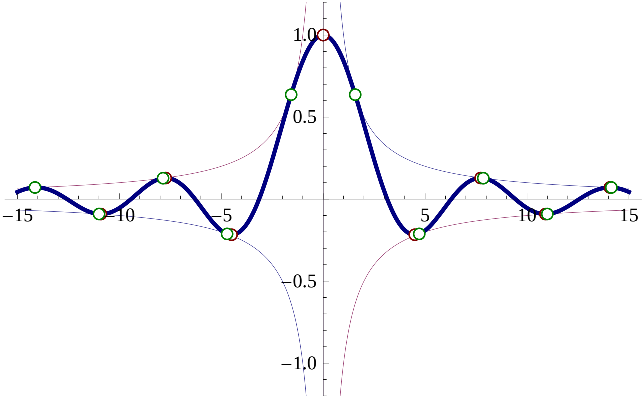
$f(x) = x \sin x.$


15
10
5
−5
−10
−15
5
10
15

Nariši graf funkcije $f(x)$.

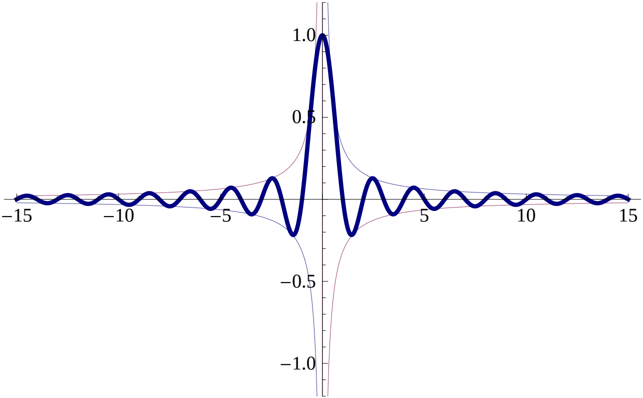
$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

- Funkcija ni definirana v $x = 0$.
- Obstaja limita $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- Graf funkcije poteka med hiperbolama $y = \pm \frac{1}{x}$.
- Za $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ se dotika hiperbole $\frac{1}{x}$.
- Za $x_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ se dotika hiperbole $-\frac{1}{x}$.
- Odvod $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ je enak nič če je $x \cos x - \sin x = 0$ oziroma $\operatorname{tg} x = x$. Enačba je transcendentna.


1.0
0.5
−0.5
−1.0
−15
−10
−5
5
10
15

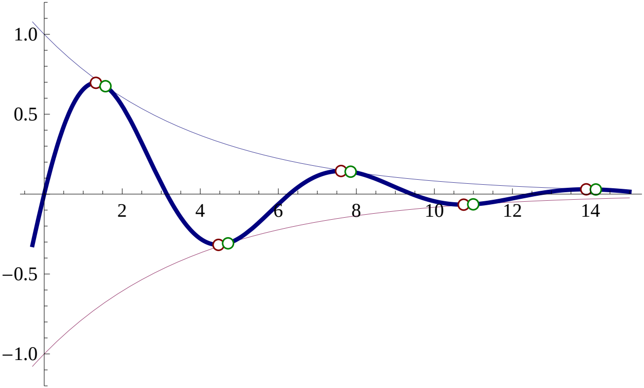
Nariši graf funkcije $f(x)$.

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$


1.0
0.5
−0.5
−1.0
−15
−10
−5
5
10
15

Nariši graf funkcije $f(x)$.

$$f(x) = e^{-x/4} \sin x.$$


1.0
0.5
−0.5
−1.0
2
4
6
8
10
12
14