

IZPIT IZ MATEMATIKE I
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (1)

1. a) Poišči najmanjše naravno število, tako da je za vse indekse n , ki so večji ali enaki temu številu, absolutna vrednost razlike med limito in n -tim členom manjša kot 0.01. N -ti člen je podan z izrazom:

$$\frac{n^2 - 3}{2n^2 + 2}.$$

- b) Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{20}.$$

2. Izračunaj integral v mejah $a = 0$, $b = 2$

$$\int_a^b \frac{3x + 1}{(x + 1)(x + 4)} dx.$$

3. Izračunaj ničle, pole, ekstreme, ... in nariši graf funkcije

$$-\frac{x(x + 2)}{x + 1}.$$

4. Izračunaj dolžino loka krivulje od x je 1 do 2. Enačba krivulje je

$$\ln(x).$$

5. a) Kdaj je funkcija navzgor omejena na intervalu od 0 do 1?

- b) Kdaj ima funkcija maksimum v točki a ?

Za oba primera navedi konkretna zgleda.

IZPIT IZ MATEMATIKE I
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (1) z rešitvami

1. a) Poišči najmanjše naravno število, tako da je za vse indekse n , ki so večji ali enaki temu številu, absolutna vrednost razlike med limito in n -tim členom manjša kot 0.01. N -ti člen je podan z izrazom:

$$\frac{n^2 - 3}{2n^2 + 2}.$$

Rešitev:

Zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{n^2-3}{2n^2+2}$ ima limito

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3}{2n^2 + 2} = \frac{1}{2}.$$

Iščemo rešitev enačbe $|a - a_n| < \varepsilon$, kjer je $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} - \frac{n^2 - 3}{2n^2 + 2} \right| &< \frac{1}{100} \\ \frac{4}{2n^2 + 2} &< \frac{1}{100} \\ n^2 + 1 &> 200 \\ n^2 &> 199 \\ n &> 14 \end{aligned}$$

Iskano naravno število je $n_0 = 15$.

- b) Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^{20}.$$

Rešitev:

Število $z = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ zapišemo v polarni obliki ($x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$):

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \\ z &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Uporabimo deMoivreovo formulo

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Vrednost izraza

$$z^{20} = \cos \frac{40\pi}{3} + i \sin \frac{40\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

2. Izračunaj integral v mejah $a = 0$, $b = 2$

$$\int_a^b \frac{3x + 1}{(x + 1)(x + 4)} dx.$$

Rešitev:

Integral racionalne funkcije izračunamo s pomočjo parcialnih ulomkov:

$$\frac{3x + 1}{(x + 1)(x + 4)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 4} = \frac{(A + B)x + 4A + B}{(x + 1)(x + 4)}$$

Primerjava števcov da sistem enačb $A + B = 3$ in $4A + B = 1$, ki ima rešitev $A = -\frac{2}{3}$ in $B = \frac{11}{3}$. Določeni integral

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{3x + 1}{(x + 1)(x + 4)} dx &= \int_0^2 \left(\frac{-\frac{2}{3}}{x + 1} + \frac{\frac{11}{3}}{x + 4} \right) dx \\ &= \left(-\frac{2}{3} \ln(x + 1) + \frac{11}{3} \ln(x + 4) \right) \Big|_0^2 \\ &= -\frac{2}{3} \ln 3 + \frac{11}{3} \ln 6 + \frac{2}{3} \underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{11}{3} \ln 4 \\ &= -\frac{2}{3} \ln 3 + \frac{11}{3} \ln 6 - \frac{11}{3} \ln 4 \end{aligned}$$

3. Izračunaj ničle, pole, ekstreme, ... in nariši graf funkcije

$$-\frac{x(x + 2)}{x + 1}.$$

Rešitev:

Racionalna funkcija $f(x) = -\frac{x(x+2)}{x+1}$ ima dve ničli $x_1 = 0$ in $x_2 = -2$, ter en pol $x = -1$. Poševna asimptota je $y = -x - 1$. Odvod:

$$f'(x) = \frac{(-2x - 2)(x + 1) + x^2 + 2x}{(x + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x - 2}{(x + 1)^2}$$

Ker je diskriminanta števca negativna, ekstremov ni.

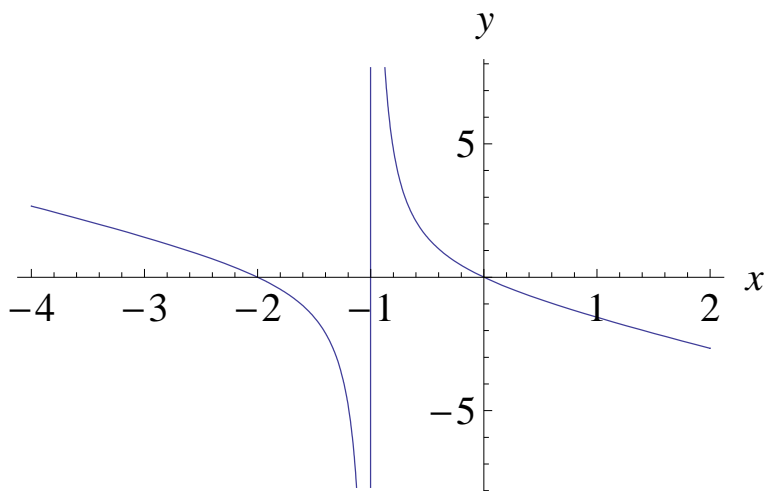
4. Izračunaj dolžino loka krivulje od x je 1 do 2. Enačba krivulje je

$$\ln(x).$$

Rešitev:

Dolžino loka krivulje $y = f(x)$ izračunamo s formulo

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$



Slika 1: Graf funkcije $f(x) = -\frac{x(x+2)}{x+1}$

Ker je $y' = \frac{1}{x}$, je $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Dolžina loka

$$\begin{aligned} s &= \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx \\ &= (\sqrt{1+x^2} + \ln x - \ln 1 + \sqrt{1+x^2}) \Big|_1^2 \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln 2 - \ln 1 + \sqrt{5} - \ln 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Najprej izračunamo nedoločeni integral. Uvedemo novo spremenljivko $t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, ki ima diferencial $dt = \frac{-x dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ in dobimo integral racionalne funkcije, ki ga rešimo z nastavkom.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = \int \frac{1}{t^2(t^2-1)} dt = \frac{A}{t} + B \ln |t| + C \ln |t+1| + D \ln |t-1|$$

Nastavek odvajamo:

$$\frac{1}{t^2(t^2-1)} = -\frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{t-1} = \frac{(B+C+D)t^3 + (-A-C+D)t^2 - Bt + A}{t^2(t^2-1)}$$

Primerjava števcov nam da neznanne koeficiente $A = 1$, $B = 0$, $C = -\frac{1}{2}$ in $D = \frac{1}{2}$. Z nekaj manipulacije in ponovno uvedbo prvotne spremenljivke x , dobimo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx &= \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \ln |t+1| + \frac{1}{2} \ln |t-1| \\ &= \sqrt{1+x^2} + \ln \sqrt{\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}} = \sqrt{1+x^2} + \ln x - \ln 1 + \sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

5. a) Kdaj je funkcija navzgor omejena na intervalu od 0 do 1?

b) Kdaj ima funkcija maksimum v točki a ?

Za oba primera navedi konkretna zgleda.

IZPIT IZ MATEMATIKE I
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (2)

1. a) Poišči najmanjše naravno število, tako da je za vse indekse n , ki so večji ali enaki temu številu, absolutna vrednost razlike med limito in n -tim členom manjša kot 0.01. N -ti člen je podan z izrazom:

$$\frac{3n - 1}{n + 1}.$$

- b) Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^{16}.$$

2. Izračunaj integral v mejah $a = 5$, $b = 6$

$$\int_a^b \frac{2x + 1}{(x - 4)(x - 3)} dx.$$

3. Izračunaj ničle, pole, ekstreme, ... in nariši graf funkcije

$$-\frac{x(x + 2)}{x + 1}.$$

4. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobiš z rotacijo krivulje od x je 0 do $\pi/2$ okoli x osi. Enačba krivulje je

$$\sqrt{x} \cos(x).$$

5. a) Napiši definicijo natančne zgornje meje za zaporedje.

- b) Kaj pravi Rollov izrek?

Za oba primera navedi konkretna zgleda.

IZPIT IZ MATEMATIKE I
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (3)

1. a) Poišči najmanjše naravno število, tako da je za vse indekse n , ki so večji ali enaki temu številu, absolutna vrednost razlike med limito in n -tim členom manjša kot 0.01. N -ti člen je podan z izrazom:

$$\frac{\sqrt{n} - 1}{2\sqrt{n} + 1}.$$

- b) Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{14}.$$

2. Izračunaj integral v mejah $a = 6$, $b = 7$

$$\int_a^b \frac{2x + 1}{(x - 5)(x - 4)} dx.$$

3. Izračunaj ničle, pole, ekstreme, ... in nariši graf funkcije

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 2}.$$

4. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobiš z rotacijo krivulje od x je 0 do $\pi/2$ okoli x osi. Enačba krivulje je

$$\sqrt{x} \cos(x).$$

5. a) Kdaj je funkcija navzgor omejena na intervalu od 0 do 1?

- b) Kdaj ima funkcija maksimum v točki a ?

Za oba primera navedi konkretna zgleda.

IZPIT IZ MATEMATIKE I
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (4)

1. a) Poišči najmanjše naravno število, tako da je za vse indekse n , ki so večji ali enaki temu številu, absolutna vrednost razlike med limito in n -tim členom manjša kot 0.01. N -ti člen je podan z izrazom:

$$\frac{-1 + 2^{n+1}}{3 + 2^{n+1}}.$$

- b) Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{19}.$$

2. Izračunaj integral v mejah $a = 0$, $b = 2$

$$\int_a^b \frac{x}{(x+1)(x+3)} dx.$$

3. Izračunaj ničle, pole, ekstreme, ... in nariši graf funkcije

$$\frac{(x-1)x}{x+1}.$$

4. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobiš z rotacijo krivulje od x je 0 do 1 okoli x osi. Enačba krivulje je

$$e^{-2x}x.$$

5. a) Napiši definicijo natančne zgornje meje za funkcijo na intervalu od 0 do 1.

- b) Kaj pravi Lagrangeov izrek?

Za oba primera navedi konkretna zgleda.

IZPIT IZ MATEMATIKE I
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (5)

1. a) Poišči najmanjše naravno število, tako da je za vse indekse n , ki so večji ali enaki temu številu, absolutna vrednost razlike med limito in n -tim členom manjša kot 0.01. N -ti člen je podan z izrazom:

$$\frac{-1 + 2^{n+1}}{1 + 3 \cdot 2^n}.$$

- b) Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{13}.$$

2. Izračunaj integral v mejah $a = 6$, $b = 7$

$$\int_a^b \frac{2x + 1}{(x - 5)(x - 4)} dx.$$

3. Izračunaj ničle, pole, ekstreme, ... in nariši graf funkcije

$$\frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 2}.$$

4. Izračunaj dolžino loka krivulje od x je 1 do 2. Enačba krivulje je

$$\ln(x).$$

5. a) Kaj pravi L'Hospitalovo pravilo?

- b) Zapiši definicijo diferenciala funkcije.

Za oba primera navedi konkretna zgleda.

IZPIT IZ MATEMATIKE I
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (6)

1. a) Poišči najmanjše naravno število, tako da je za vse indekse n , ki so večji ali enaki temu številu, absolutna vrednost razlike med limito in n -tim členom manjša kot 0.01. N -ti člen je podan z izrazom:

$$\frac{-1 + 2^{n+1}}{1 + 2^n}.$$

- b) Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{14}.$$

2. Izračunaj integral v mejah $a = 6$, $b = 7$

$$\int_a^b \frac{2x + 1}{(x - 5)(x - 4)} dx.$$

3. Izračunaj ničle, pole, ekstreme, ... in nariši graf funkcije

$$-\frac{x(x + 2)}{x + 1}.$$

4. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobiš z rotacijo krivulje od x je 0 do π okoli x osi. Enačba krivulje je

$$\sqrt{x} \sin(x).$$

5. a) Kaj pravi L'Hospitalovo pravilo?

- b) Zapiši definicijo diferenciala funkcije.

Za oba primera navedi konkretna zgleda.

IZPIT IZ MATEMATIKE I
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (7)

1. a) Poišči najmanjše naravno število, tako da je za vse indekse n , ki so večji ali enaki temu številu, absolutna vrednost razlike med limito in n -tim členom manjša kot 0.01. N -ti člen je podan z izrazom:

$$\frac{3n^3 - 3}{2n^3 + 3}.$$

- b) Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{14}.$$

2. Izračunaj integral v mejah $a = 0$, $b = 2$

$$\int_a^b \frac{3x + 1}{(x + 1)(x + 4)} dx.$$

3. Izračunaj ničle, pole, ekstreme, ... in nariši graf funkcije

$$\frac{(x - 2)x}{x - 1}.$$

4. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobiš z rotacijo krivulje od x je 0 do 1 okoli x osi. Enačba krivulje je

$$e^{-2x}x.$$

5. a) Kdaj je funkcija navzgor omejena na intervalu od 0 do 1?

- b) Kdaj ima funkcija maksimum v točki a ?

Za oba primera navedi konkretna zgleda.

IZPIT IZ MATEMATIKE I
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (8)

1. a) Poišči najmanjše naravno število, tako da je za vse indekse n , ki so večji ali enaki temu številu, absolutna vrednost razlike med limito in n -tim členom manjša kot 0.01. N -ti člen je podan z izrazom:

$$\frac{3n^3 - 1}{3n^3 + 2}.$$

- b) Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{11}.$$

2. Izračunaj integral v mejah $a = 0$, $b = 2$

$$\int_a^b \frac{x}{(x+1)(x+3)} dx.$$

3. Izračunaj ničle, pole, ekstreme, ... in nariši graf funkcije

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-2}.$$

4. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobiš z rotacijo krivulje od x je 0 do 1 okoli x osi. Enačba krivulje je

$$e^{-2x}x.$$

5. a) Napiši definicijo natančne zgornje meje za funkcijo na intervalu od 0 do 1.

- b) Kaj pravi Lagrangeov izrek?

Za oba primera navedi konkretna zgleda.