

Pisni izpit iz matematike 1 VSP

17. februar 2011

Ob nalogi je zapisan še odstotek študentov, ki je uspešno rešil nalogo.

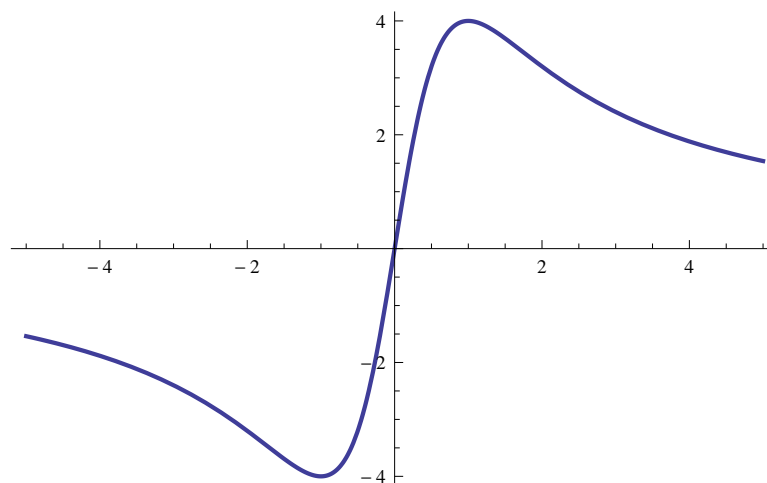
(1) Dana je funkcija  $f(x) = \frac{8x}{1+x^2}$ . **10%**

- Določi stacionarne točke,

$$f'(x) = -8 \frac{-1+x^2}{(1+x^2)^2} = 0, \quad x_{1,2} = \pm 1,$$

- asimptote,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{1+x^2} = 0, \text{ asimptota je os } x,$$

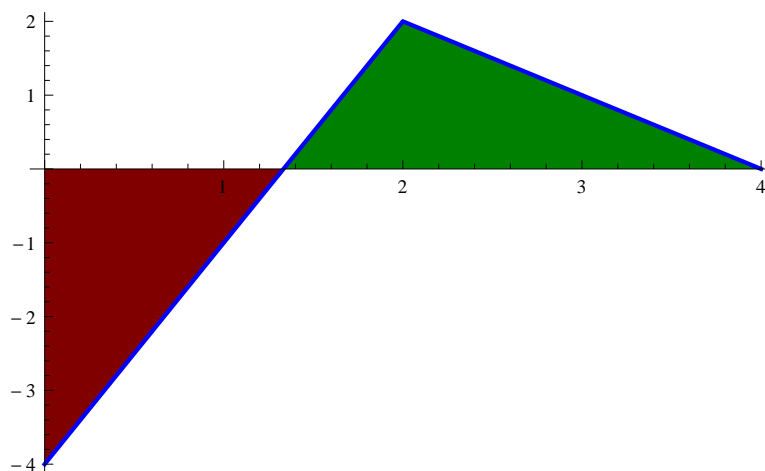


- in nariši graf,

(2) Dana je funkcija  $f(x) = x - 2|x - 2|$ . **1.4%**

$$(a) f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & x < 2 \\ -x + 4 & x \geq 2 \end{cases}$$

(b) Graf  $f(x)$



- Izračunaj  $\int_0^4 f(x) dx$ .

Razlika ploščin zelenega in rdečega trikotnika  $S = -4/3 * 4/2 + (4 - 4/3) * 2/2 = 0$ .

- Koliko je odvod funkcije v točki  $x = 3$ .

$$f'(3) = (-x + 4)'|_{x=3} = -1$$

- Poišči razliko med največjo in najmanjšo funkcijsko vrednostjo na intervalu  $[0, 4]$ .

Najmanjša vrednost je -4, največja pa 2. Razlika je 6.

- (3) Koliko je absolutna vrednost kompleksnega števila  $z = \left( \frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}} \right)^{10}$ . **7.1%**

$$|1+i|^{10} / |-1+i\sqrt{3}|^{10} = 1/\sqrt{2}^{10} = 1/32$$

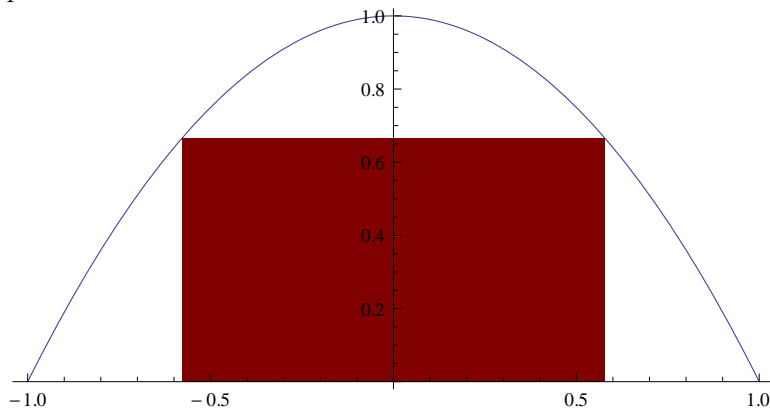
- (4) Za dano zaporedje s splošnim členom  $a_n = \frac{1+n}{2+14n}$  poišči najmanjše naravno število  $N$  tako, da za vsak  $n \geq N$  velja  $|a_n - a| < \epsilon$ , kjer je  $a$  limita zaporedja in  $\epsilon = 0.01$ . **22.9%**

$$\text{Limita zaporedja } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{1+14n} = \frac{1}{14}. \left| \frac{1+n}{1+14n} - \frac{1}{14} \right| < \frac{1}{100}, \quad n > \frac{293}{49}.$$

- (5) Izračunaj nedoločeni integral  $\int \frac{x+1}{x^2+1} dx$ . **8.5%**

$$\int \frac{x+1}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \arctg x + C$$

- (6) Poišči dolžino stranice tistega pravokotnika včrtanega paraboli  $f(x) = 1 - x^2$ , ki ima največjo ploščino. **0%**

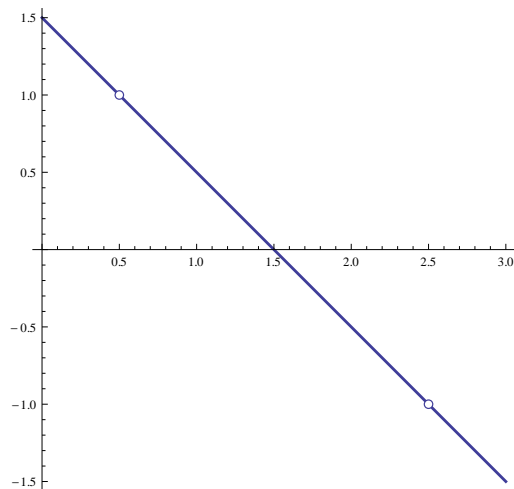


Ploščina je enaka  $S = 2xf(x)$ , njen odvod  $2 - 6x^2$ ,  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

(7) Izračunaj  $\arcsin(\sin \frac{7\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4}$ . **28.6 %**

(8) Določi kompozituma  $f(g(x))$  in  $g(f(x))$ , če je  $f(x) = x^2$  in  $g(x) = \sqrt{x}$ . **1.4 %**  
 $f(g(x)) = x$ ,  $\mathcal{D} = [0, \infty]$ ,  $g(f(x)) = |x|$ ,  $\mathcal{D} = [-\infty, \infty]$ .

(9) Določi linearno funkcijo  $f(x)$ , če je  $f(0.5) = 1$  in  $f(2.5) = -1$ . **31 %**  
 $f(x) = ax + b$ ,  $1 = a \cdot 0.5 + b$  in  $-1 = a \cdot 2.5 + b$ . Od tod je  $a = -1$  in  $b = 3/2$ .



(10) L'Hôpitalovo pravilo. **37 %**

- Kaj računamo s pomočjo njega?

S pomočjo njega računamo limite oblike

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x)}{\psi(x)},$$

kjer je  $\phi(x_0) = \psi(x_0) = 0$

- Pod kakšnimi pogoji ga lahko uporabljamo?

Če sta v okolici točke  $x_0$  funkciji odvedljivi in je  $\psi'(x_0) \neq 0$ , potem velja

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = \frac{\phi'(x_0)}{\psi'(x_0)}.$$