IZPIT IZ MATEMATIKE I

Visokošolski študij

11. februar 2014

1. Poiščite vse rešitve enačbe

$$\overline{z} - 1 = (z-1)^2.$$

Rešitev:
Z vpeljavo $z = x + \mathrm{i}y$ dobimo enačbo

$$x - 1 - \mathrm{i}y = (x-1)^2 - y^2 + 2\mathrm{i}(x-1)y.$$

Ko primerjamo realni in imaginarni komponenti, dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} x - 1 &= (x-1)^2 - y^2, \\ -y &= 2(x-1)y. \end{aligned}$$

Po preureditvi druge enačbe v $(2x-1)y = 0$, dobimo dva podprimera, in sicer $x = \frac{1}{2}$ in $y = 0$. V prvem podprimeru dobimo nato iz prve enačbe $y^2 = \frac{3}{4}$, od koder sledi $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. V drugem podprimeru pa iz prve enačbe dobimo enačbo $(x-1)(x-2) = 0$, ki ima rešitvi $x = 1$ in $x = 2$. Tako dobimo vse štiri rešitve prvotne enačbe: $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = 1$ in $z_4 = 2$.

2. Koliko členov zaporedja s splošnim členom $a_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2+3}$ leži izven ε-okolice limite za $\varepsilon = \frac{1}{10}$?

Rešitev: Limita danega zaporedja je $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-1}{n^2+3} = 2$. Rešiti moramo neenačbo $|a_n - a| > \varepsilon$. Sledi

$$\begin{aligned} \left|\frac{2n^2-1}{n^2+3} - 2\right| &> \frac{1}{10} \\ \frac{}{n^2+3} &> \frac{1}{10} \\ n^2 &< 67 \\ n &< 8.2 \end{aligned}$$

Izven okolice leži 8 členov zaporedja.

3. Dana je funkcija

$$f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0.$$

a) Določite definicijsko območje dane funkcije.
b) Določite in klasificirajte lokalne ekstreme dane funkcije.
c) Poiščite vsaj eno vrednost parametra a tako, da bosta lokalna ekstrema celi števili.

Rešitev:

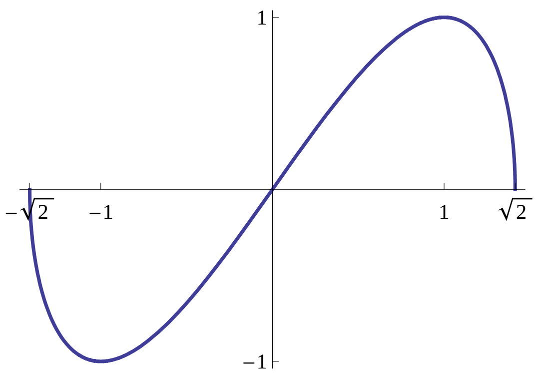
a) Definicijsko območje dobimo tam, kjer je $a^2 - x^2 \geq 0$, tj. na intervalu $\mathcal{D}_f = [-a, a]$.

b) Kandidate za lokalne ekstreme dobimo tam, kjer je prvi odvod enak 0

$$f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0.$$

Iz enačbe $a^2 = 2x^2$ dobimo dve stacionarni točki $x_{1,2} = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ker je dana funkcija na intervalih $(-a, -\frac{a\sqrt{2}}{2})$ in $(\frac{a\sqrt{2}}{2}), a)$ padajoča, na intervalu $(-\frac{a\sqrt{2}}{2}), \frac{a\sqrt{2}}{2}))$ pa naraščajoča, dobimo v točki $x_1 = -\frac{a\sqrt{2}}{2})$ lokalni minimum, v točki $x_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2})$ pa lokalni maksimum.

c) Lokalna ekstrema bosta celi števili za izbiro $a = \sqrt{2}$ ali za $a = n\sqrt{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Graf funkcije za izbiro $a = \sqrt{2}$:



4. Izračunajte integrala

a) $\displaystyle\int 2x \cos(3x)\, \mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int_1^2 x(1-x)^3\, \mathrm{d}x$.

Rešitev: Nastavek za rešitev je

a) Uporabimo integracijo po delih ($u = 2x$, $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = \cos(3x)\mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{3}\sin(3x)$) in dobimo

$$\int 2x\cos(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sin(3x) - \frac{2}{3}\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sin(3x) + \frac{2}{9}\cos(3x) + C.$$

b) Uporabimo novo spremenljivko ($t = 1 - x$, $x = 1 - t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$) z novimi mejami ($x = 1 \Rightarrow t = 0$, $x = 2 \Rightarrow t = -1$) in dobimo

$$\int_1^2 x(1-x)^3\,\mathrm{d}x = -\int_0^{-1} (1-t)t^3\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 \left(t^3 - t^4\right)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^0 = \frac{9}{20}.$$

5. Dan je polinom $p(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$.

a) Izračunajte ničle tega polinoma.

b) Izračunajte ploščino obeh delov lika, ki je omejen z grafom polinoma in abscisno osjo.
NAMIG: Narišite graf polinoma.

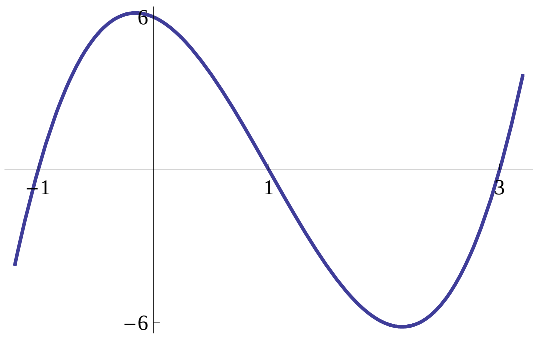
Rešitev:

a) Polinom razcepimo in dobimo

$$p(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = 2x(x^2 - 1) - 6(x^2 - 1) = 2(x-3)(x-1)(x+1).$$

Ničle so $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ in $x_3 = 3$.

b) Graf polinoma:



Ploščino izračunamo kot vsoto dveh delov $S = S_1 + S_2$, tako da integriramo polinom po ustreznih intervalih med sosednjima ničlama.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} \left(2x^3 - 6x^2 - 2x + 6\right)\, \mathrm{d}x - \int_{1}^{3} \left(2x^3 - 6x^2 - 2x + 6\right)\, \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^4}{2} - 2x^3 - x^2 + 6x\right)\Bigg|_{-1}^{1} - \left(\frac{x^4}{2} - 2x^3 - x^2 + 6x\right)\Bigg|_{1}^{3} = 16. \end{aligned}$$