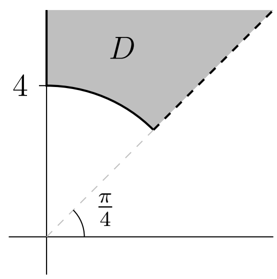
Matematika I (VSP) - Izpit
29.8.2014

1. V kompleksni ravnini skicirajte množico

$$D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |3z| \geq 12,\ \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Ugotovite, ali število $(3+\sqrt{3}i)^{26}$ leži v množici D.

REŠITEV. Neenačba $|3z| \geq 12$ je ekvivalentna neenačbi $|z| \geq 4$. Skica množice D je torej naslednja



Število $3+\sqrt{3}i$ zapišemo v polarnem zapisu. Absolutna vrednost je enaka $\sqrt{9+3} = \sqrt{12}$, argument pa $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$. Torej je

$$(3+\sqrt{3}i)^{26} = \left(\sqrt{12}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^{26} = (\sqrt{12})^{26}\left(\cos\frac{26\pi}{6} + i\sin\frac{26\pi}{6}\right) =$$
$$= 12^{13}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Ker je $12^{13} \geq 4$ in $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$, število $(3+\sqrt{3}i)^{26}$ leži v množici D.

2. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = n + \frac{90}{n}$.

   (a) Od katerega člena dalje je zaporedje naraščajoče?

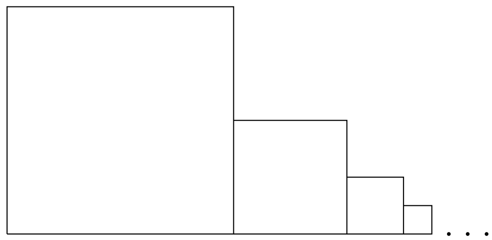
   (b) Določite minimum, maksimum, infimum in supremum zaporedja (če obstajajo).

   REŠITEV.

   (a) Z upoštevanjem predpisa za splošni člen zaporedja neenakost $a_{n+1} > a_n$ preuredimo v $n^2+n-90 > 0$ oziroma $(n-9)(n+10) > 0$. Slednja neenakost je izpolnjena za vsa naravna števila n večja od 9. Zaporedje torej od člena a_{10} dalje strogo narašča (pred tem pa pada).

   (b) Minimum in infimum zaporedja sta enaka $a_{10} = 19$, maskimum in supremum zaporedja pa ne obstajata, saj zaporedje konvergira proti ∞.

3. Jaka je na list papirja skiciral neskončno figuro sestavljeno iz kvadratov (glej skico). Dolžina stranice vsakega naslednjega kvadrata v vrsti je enaka polovici dolžine stranice predhodnega kvadrata. Koliko bi morala biti dolga stranica prvega kvadrata, da bi bila ploščina celotne figure enaka 48 cm^2?



Nasvet: geometrijska vrsta

Rešitev. Označimo dolžino stranice prvega kvadrata z x merjeno v centimetrih. Potem je ploščina prvega kvadrata enaka x^2, stranica drugega kvadrata je dolga $\frac{x}{2}$, njegova ploščina pa je enaka $\frac{x^2}{4}$, stranica tretjega kvadrata je dolga $\frac{x}{4}$, njegova ploščina pa je enaka $\frac{x^2}{16}$, stranica četrtega knadrata je dolga $\frac{x}{8}$, njegova ploščina pa je enaka $\frac{x^2}{64}$, in tako dalje. Skupna ploščino Jakove figure je torej enaka vsoti vrste $x^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{64} + \ldots$. To je geometrijska vrsta z začetnim členom x^2 in kvocientom $\frac{1}{4}$. Njena vsota je zato enaka $\frac{x^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4x^2}{3}$. Veljati mora torej $\frac{4x^2}{3} = 48$, od koder izračunamo $x = 6$.

4. Nivo vode v akumulacijskem jezeru je opisan s funkcijo

$$f(t) = \frac{5t^2 - 14t + 13}{t^2 - 3t + 3},$$

kjer je t čas.

(a) Ob katerem času je bilo v jezeru največ vode?

(b) Kaj se je dogajalo z gladino vode ob času $t = 0$, se je ta višala ali nižala?

Rešitev.

(a) Iščemo maksimum funkcije f. Odvod funkcije f je enak $f'(x) = \frac{-t^2+4t-3}{(t^2-3t+3)^2}$. Kandidati za ekstreme so rešitve enačbe $-t^2+4t-3 = 0$, to sta $t = 1$ in $t = 3$. Kateri od teh dveh je maksimum preverimo z drugim odvodom funkcije, ki je enak $f''(x) = \frac{2t^3-12t^2+18t-6}{(t^2-3t+3)^3}$. Ker je $f''(1) = 2 > 0$ in $f''(3) = -\frac{6}{27} < 0$, je maksimum dosežen pri $t = 3$.

(b) Ker je $f'(0) = -\frac{3}{9} < 0$, funkcija f pri $t = 0$ pada, torej se je gladina vode ob času $t = 0$ nižala.

5. (a) Izračunajte integral

$$\int \frac{x+1}{x^2+x-2}\,dx.$$

(b) Izračunajte volumen vrtenine, ki jo dobimo, če krivuljo $y = \sqrt{x^2+1}$ na intervalu $[-1, 2]$ zavrtimo okrog x-osi.

Rešitev.

(a) Integral izračunamo s pomočjo parcialnih ulomkov

$$\int \frac{x+1}{x^2+x-2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + C.$$

(b) Volumen izračunamo z integralom

$$V = \pi \int_{-1}^{2} y^2 \; dx = \pi \int_{-1}^{2} (x^2 + 1) \; dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Bigg|_{-1}^{2} = 6\pi.$$