IZPIT IZ MATEMATIKE I
Visokošolski strokovni študij

20. junij 2014

1. Rešite neenačbo
$$|3x-1| \geq 1 + |2x-3|.$$

Rešitev. Ločimo tri primere:
- primer $x \leq \frac{1}{3}$:
$$-3x+1 \geq 1-2x+3 \quad \Longrightarrow \quad x \leq -3$$
kar je tudi v skladu z omejitvijo tega posameznega primera
- primer $\frac{1}{3} < x \leq \frac{3}{2}$:
$$3x-1 \geq 1-2x+3 \quad \Longrightarrow \quad 5x \geq 5 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 1$$
v preseku z omejitvijo tega posameznega primera torej $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$
-primer $x > \frac{3}{2}$:
$$3x-1 \geq 1+2x-3 \quad \Longrightarrow \quad x \geq -1$$
oziroma v preseku s pogojem tega primera: $x > \frac{3}{2}$
Skupna rešitev naloge je unija gornjih rešitev posameznih primerov, torej
$$x \leq -3 \quad \text{ali} \quad x \geq 1.$$

2. Dano je kompleksno število $w = i - 1$.
   (a) Izračunajte w^{20}.
   (b) V okviru kompleksnih števil rešite enačbo $z^3 - w = 0$.

Rešitev.

(a) $(i-1)^{20} = (-2i)^{10} = -1024$.
Nalogo seveda lahko rešimo tudi tako, da število $i-1$ pretvorimo najprej v polarno obliko in nato potenciramo.

(b) Če $i-1$ pretvorimo v polarno obliko, dobimo $i-1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Zato se rešitve glasijo

$$
\begin{aligned}
z_k &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right), \quad k=0,1,2\\
z_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
z_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)\\
z_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)
\end{aligned}
$$

3. Utemeljite, ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{2}}$$

konvergentna.

Rešitev. Uporabimo korenski kriterij in dobimo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{-1}<1$$

kar pomeni, da vrsta konvergira.

4. Gibanje cene delnic neke družbe na borzi opiše funkcija

$$f(t)=\frac{2t^2-6t+6}{t^2-4t+5}.$$

V katerem trenutku je bilo najbolje delnice kupovati in v katerem najbolje prodajati?

Rešitev. Iskani trenutki so v resnici ekstremi podane funkcije. Zato

$$
\begin{aligned}
&f'(t)=\frac{-2t^2+8t-6}{(t^2-4t+5)^2}\\
&f'(t)=0 \quad\Longrightarrow\quad t^2-4t+3=0 \quad\Longrightarrow\quad t_1=1, t_2=3\\
&f''(t)=...=\frac{4t^3-24t^2+36t-8}{(t^2-4t+5)^3}\\
&f''(1)=1>0 \quad\Longrightarrow\quad t=1 \text{ je minimum - torej najbolje kupovati}\\
&f''(3)=-1<0 \quad\Longrightarrow\quad t=3 \text{ je maksimum - torej najbolje prodajati}
\end{aligned}
$$

5. Kmet ima trikotni pašnik, ki je omejen s premicami

$$x - 2y = 0, \quad 2x - y = 0, \quad 2x + y = 20.$$

Koliko krav lahko ima na tem pašniku, če želi, da ima vsaka krava dve kvadratni enoti prostora?

Rešitev. Najprej bomo poračunali površino pašnika. Pogledamo si presečišča podanih premic:

- premici $x - 2y = 0, 2x - y = 0$ se sekata pri $x = 0$

- premici $x - 2y = 0, 2x + y = 20$ se sekata pri $x = 8$

- premici $2x - y = 0, 2x + y = 20$ se sekata pri $x = 5$

Zato je površina enaka

$$\int_0^5 \left(2x - \frac{x}{2}\right) dx + \int_5^8 \left(20 - 2x - \frac{x}{2}\right) dx = ... = 30$$

Ker želimo, da ima vsaka krava dve kvadratni enoti prostora, je torej prostora za 15 krav.