1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Visokošolski študij

15. november 2003

1. [15T] Reši neenačbo in rešitev zapiši kot interval oziroma unijo intervalov:

$$\left|2x-1\right|-x<0.$$

Rešitev:
Oglejmo si najprej, kdaj je pod absolutno vrednostjo nenegativni in kdaj negativno število.
Prvi primer je, ko je argument absolutne vrednosti nenegativno število. Torej, ko je

$$\begin{aligned} 2x-1 &\geq 0 \\ x &\geq \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Rešitev se sedaj glasi:

$$\begin{aligned} 2x-1-x &< 0 \\ x-1 &< 0 \\ x &< 1 \end{aligned}$$

Za rešitev dobimo interval $\left[\frac{1}{2},1\right)$.
Drugi primer je, ko je argument absolutne vrednosti negativno število. Torej, ko je

$$\begin{aligned} 2x-1 &< 0 \\ x &< \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Rešitev se sedaj glasi:

$$\begin{aligned} -2x+1-x &< 0 \\ -3x+1 &< 0 \\ x &> \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Za rešitev dobimo interval $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.
Skupna rešitev prvotne neenačbe je unija rešitev obeh primerov, torej interval $\left(\frac{1}{3},1\right)$.

2. [15T] Poišči vse rešitve enačbe:

$$z^3=-2+2i\sqrt{3}.$$

Rešitev:
Enačbo

$$z^3=-2+2i\sqrt{3}$$

zapišemo v polarni obliki. Kompleksno število v polarni obliki zapišemo kot

$$z=|z|(\cos\phi+i\sin\phi).$$

Leva stran se tako glasi:

$$z^3=|z|^3(\cos 3\phi+i\sin 3\phi).$$

Sedaj je potrebno v polarni obliki zapisati še število $-2+2i\sqrt{3}$.
Izračunamo oba argumenta, to je oddaljenost od izhodišča in kot:

$$r = 4, \qquad \alpha = \tfrac{2\pi}{3}.$$

Sledi:

$$-2+2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}\right).$$

Dobimo enačbo:

$$|z|^3(\cos 3\phi + i\sin 3\phi) = 4\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}\right).$$

Dve kompleksni števili sta enaki, ko imata enaka polmera in enaka kosinusa kotov. Dobimo dve enačbi, in sicer:

$$|z|^3 = 4 \quad \text{in} \quad \cos(3\phi) = \cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right).$$

Rešitev prve enačbe je

$$|z| = \sqrt[3]{4},$$

za rešitev druge pa se spomnimo, kdaj sta dva kosinusa enaka. To je tedaj, ko se argumenta razlikujeta za večkratnik periode, to je za $k\cdot 2\pi$. Dobimo:

$$\begin{aligned} 3\phi &= \tfrac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi, \qquad k\in\mathbb{Z},\\ \phi_k &= \tfrac{2\pi}{9} + \tfrac{2k\pi}{3}, \qquad k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zanimajo nas trije koti, in sicer:

$$\phi_0 = \tfrac{2\pi}{9}, \quad \phi_1 = \tfrac{8\pi}{9}, \quad \phi_2 = \tfrac{14\pi}{9}.$$

Rešitev zapišemo v obliki:

$$z_k = |z|(\cos\phi_k + i\sin\phi_k).$$

Enačba ima tedaj tri rešitve:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\tfrac{2\pi}{9} + i\sin\tfrac{2\pi}{9}\right),\\ z_1 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\tfrac{8\pi}{9} + i\sin\tfrac{8\pi}{9}\right),\\ z_2 &= \sqrt[3]{4}\left(\cos\tfrac{14\pi}{9} + i\sin\tfrac{14\pi}{9}\right). \end{aligned}$$

3. [10T] Izračunaj limito zaporedja, podanega s splošnim členom

$$a_n = \frac{7n^3+2n^2+n-1}{2n^3-n}.$$

Rešitev:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3+2n^2+n-1}{2n^3-n} = \tfrac{7}{2}$$

Ulomek zgoraj in spodaj delimo z največjo potenco, to je z n^3. Ostali členi gredo proti 0.

4. [10T] Ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}$$

konvergentna? Odgovor utemelji.

Rešitev:
Za dokaz konvergence vrste uporabimo kvocientni kriterij:

$$q = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1)!\cdot n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Ker je $q<1$, je vrsta konvergentna.