KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Visokošolski študij

9. januar 2006

1. [20T] Izračunaj vrednost izraza:

$$z = i^{17} + \frac{4}{i+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{15}.$$

Rešitev:
Velja: $i^{17} = i$ in $\frac{4}{i+1} = \frac{4(1-i)}{2} = 2 - 2i$.
Da izračunamo izraz $\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{15}$ je potrebno število $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ zapisati v polarni obliki in nato uporabiti DeMoivreovo formulo:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Ker je $r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ in $\varphi = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ (ker je število v prvem kvadrantu), velja

$$\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Uporabimo DeMoivreovo formulo, in dobimo:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{15} = \cos\frac{15\pi}{3} + i\sin\frac{15\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Torej je:

$$z = i^{17} + \frac{4}{i+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{15} = i + 2 - 2i - 1 = 1 - i.$$

2. [20T] Izračunaj ničle, pole, asimptoto in ekstreme funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 2}$$

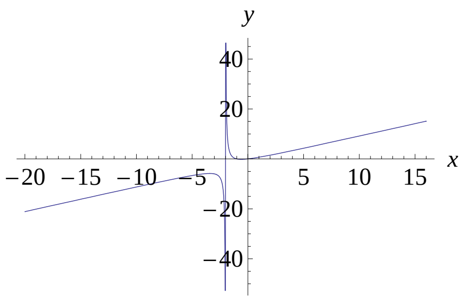
ter nato še nariši graf funkcije.
Rešitev:
Ker je $x^2 + x = x(x+1)$, dobimo dve ničli: $x_1 = 0$ in $x_2 = -1$. Pol je v točki $x = -2$. Ker je stopnja polinoma v števcu za 1 večja kot stopnja polinoma v imenovalcu, dobimo poševno asimptoto, in sicer $y = x - 1$ (delimo polinome, ostanek pri deljenju je 2). Sedaj izračunajmo še ekstreme. Za to potrebujemo prvi odvod funkcije $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+2) - (x^2+x)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 2}{(x+2)^2}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer je prvi odvod enak nič, torej v točkah:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

Vrednost funkcije v točki x_1 je $f(-2+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 3$, v tocki x_2 pa je $f(-2-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} - 3$. V točki x_1 imamo lokalni minimum, v točki x_2 pa lokalni maksimum.



Slika 1: Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2+x}{x+2}$.

3. [20T] Izračunaj limito

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

Namig: pomagaj si z L'Hospitalovim pravilom.
Rešitev:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos^2(x)+\sin^2(x)}{1} = 1$$

L'Hospitalovo pravilo smo uporabili dvakrat.

4. [20T] Izračunaj integral

$$\int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}dx.$$

Rešitev:
Integral rešimo s pomočjo uvedbe nove spremenljivke: $t = e^{2x}$, $dt = 2e^{2x}dx$.

$$\int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}dx = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t = \arcsin e^{2x} + C$$

5. [20T] Izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo, če graf funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{3x+6}{x(x+3)}}$ zarotiramo na intervalu $1 < x < 5$ okrog osi x.
Rešitev:
Volumen rotacijskega telesa izračunamo s pomočjo formule:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

V našem primeru ($a = 1$, $b = 5$) dobimo:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^5 \left(\sqrt{\frac{3x+6}{x(x+3)}}\right)^2 dx = \pi \int_1^5 \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+3}\right) dx \\ &= \pi \left(2\log|x| + \log|x+3|\right)\Big|_1^5 \\ &= \pi \left(2\log 5 - 2\log 1 + \log 8 - \log 4\right) = \pi \log 50 \end{aligned}$$

Ulomek $\frac{3x+6}{x(x+3)}$ razbijemo na parcialne ulomke:

$$\frac{3x+6}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+3A}{x(x+3)}.$$

Iz enačb $A + B = 3$ in $3A = 6$ dobimo $A = 2$ in $B = 1$. Upoštevamo tudi, da je $\log 1 = 0$.

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Visokošolski študij

9. januar 2006

1. [20T] Izračunaj vrednost izraza:

$$z = i^{15} + \tfrac{2}{i-1} + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{21}.$$

Rešitev:
Velja: $i^{15} = -i$ in $\frac{2}{i-1} = \frac{2(-1-i)}{2} = -1-i$.
Da izračunamo izraz $\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{21}$ je potrebno število $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ zapisati v polarni obliki in nato uporabiti DeMoivreovo formulo:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Ker je $r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ in $\varphi = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ (ker je število v prvem kvadrantu), velja

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \left(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}\right).$$

Uporabimo DeMoivreovo formulo, in dobimo:

$$\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{21} = \cos\tfrac{21\pi}{3} + i\sin\tfrac{21\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Torej je:

$$z = i^{15} + \tfrac{2}{i-1} + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{21} = -i - 1 - i - 1 = -2 - 2i.$$

2. [20T] Izračunaj ničle, pole, asimptoto in ekstreme funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 2}$$

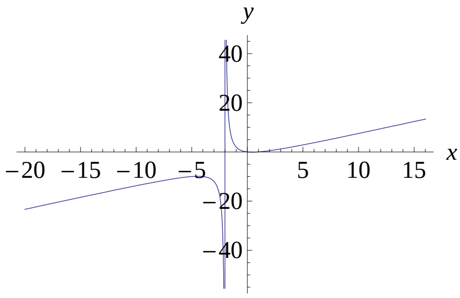
ter nato še nariši graf funkcije.
Rešitev:
Ker je $x^2 + x = x(x+1)$, dobimo dve ničli: $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$. Pol je v točki $x = -2$. Ker je stopnja polinoma v števcu za 1 večja kot stopnja polinoma v imenovalcu, dobimo poševno asimptoto, in sicer $y = x - 3$ (delimo polinome, ostanek pri deljenju je 6). Sedaj izračunajmo še ekstreme. Za to potrebujemo prvi odvod funkcije $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+2) - (x^2 - x) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 2}{(x+2)^2}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer je prvi odvod enak nič, torej v točkah:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

Vrednost funkcije v točki x_1 je $f(-2+\sqrt{6}) = 2\sqrt{6} - 5$, v tocki x_2 pa je $f(-2-\sqrt{6}) = -2\sqrt{6} - 5$. V točki x_1 imamo lokalni minimum, v točki x_2 pa lokalni maksimum.



Slika 2: Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2+x}{x+2}$.

3. [20T] Izračunaj limito
$$\lim_{x\to\pi} \frac{1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(x-\pi\right)^2}.$$
Namig: pomagaj si z L'Hospitalovim pravilom.
Rešitev:
$$\lim_{x\to\pi} \frac{1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(x-\pi\right)^2} = \lim_{x\to\pi} \frac{-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{2\left(x-\pi\right)} = \lim_{x\to\pi} \frac{-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$
L'Hospitalovo pravilo smo uporabili dvakrat.

4. [20T] Izračunaj integral
$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx.$$
Rešitev:
Integral rešimo s pomočjo uvedbe nove spremenljivke: $t = e^x$, $dt = e^x dx$.
$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t = \arcsin e^x + C$$

5. [20T] Izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo, če graf funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{4x+3}{x(x+3)}}$ zarotiramo na intervalu $1 < x < 5$ okrog osi x.
Rešitev:
Volumen rotacijskega telesa izračunamo s pomočjo formule:
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$
V našem primeru ($a = 1$, $b = 5$) dobimo:
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^5 \left(\sqrt{\frac{4x+3}{x(x+3)}}\right)^2 dx = \pi \int_1^5 \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x+3}\right) dx \\ &= \pi \left(\log|x| + 3\log|x+3|\right)\Big|_1^5 \\ &= \pi \left(\log 5 - \log 1 + 3\log 8 - 3\log 4\right) = \pi \log 40 \end{aligned}$$
Ulomek $\frac{4x+3}{x(x+3)}$ razbijemo na parcialne ulomke:
$$\frac{4x+3}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+3A}{x(x+3)}.$$
Iz enačb $A + B = 4$ in $3A = 3$ dobimo $A = 1$ in $B = 3$. Upoštevamo tudi, da je $\log 1 = 0$.