REŠITVE A skupina

Naloga 1 (20 točk)
Določi podmnožico realnih števil, ki zadošča neenačbi

$$8 - |x - 4| \geq 2.$$

Neenakost poenostavimo v $|x-4| \leq 6$. *Glede na predznak izraza pod absolutno vrednostjo ločimo dve možnosti:*

- $x - 4 \geq 0$ *(*$x \geq 4$*)*
  V tem primeru dobimo neenačbo: $x - 4 \leq 6$ *oz.* $x \leq 10$. *Torej, prva delna rešitev je* $R_1 = (-\infty, 10] \cap [4, \infty) = [4, 10]$.
- $x - 4 < 0$ *(*$x < 4$*)*
  V tem primeru dobimo neenačbo: $-(x-4) \leq 6$ *oz.* $-x \leq 2$. *Torej,* $x \geq -2$. *Sledi, druga delna rešitev je* $R_2 = [-2, \infty) \cap (-\infty, 4) = [-2, 4)$.

Rešitev neenačbe je $R_1 \cup R_2 = [4, 10] \cup [-2, 4) = [-2, 10]$.

Naloga 2 (20 točk)
Ugotovi, od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \frac{4^n + 4}{4^n}$$

razlikujejo od limite za manj kot 4^{-5}.

Najprej izračunajmo limito zaporedja s splošnim členom a_n*:*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n + 4}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^n}{4^n} + \frac{4}{4^n}}{\frac{4^n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{4^{n-1}}}{1} = 1.$$

Da se členi zaporedja razlikujejo od limite $a = 1$ *za manj kot* 4^{-5}, *zapišemo kot*

$$|a_n - 1| < 4^{-5}.$$

Računamo:

$$|a_n - 1| = |\frac{4^n + 4}{4^n} - 1| = |\frac{4}{4^n}| = \frac{1}{4^{n-1}} = 4^{1-n} < 4^{-5}.$$

Dobljena neenakost

$$4^{1-n} < 4^{-5}$$

bo izpolnjena za $1 - n < -5$ oz. $n > 6$. Torej, od 7. člena dalje se vsi členi zaporedja razlikujejo od limite za manj kot 4^{-5}.

Naloga 3 (20 točk)
Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{2x + 3}$$

in nariši njen graf. Določi tudi ničle, pole, začetno vrednost, asimptoto in ekstreme funkcije f.

Definicijsko območje racionalne funkcije $f(x)$ je $D_f = (-\infty, \infty) - \{-\frac{3}{2}\}$, tj. vsa realna števila, razen $-\frac{3}{2}$.

Ničle so rešitve enačbe $x^2 - 2 = 0$, torej $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$.

Poli so rešitve enačbe $2x + 3 = 0$, torej $x_3 = -\frac{3}{2}$.

Začetna vrednost: $f(0) = -\frac{2}{3}$.

Asimptoto dobimo pri deljenju polinoma v števcu s polinomom v imenovalcu racionalne funkcije:

$(x^2 - 2) : (2x + 3) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ *(ostanek pri deljenju je $\frac{1}{4}$).*

Kandidati za ekstreme so stacionarne točke, tj. ničle funkcije $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x(2x + 3) - (x^2 - 2)2}{(2x + 3)^2} = \frac{2x^2 + 6x + 4}{(2x + 3)^2} = \frac{2(x + 2)(x + 1)}{(2x + 3)^2}.$$

Dobimo dve stacionarni točki: $x_4 = -2$, $x_5 = -1$. Njuno naravo določimo z drugim odvodom:

$$f''(x) = \frac{(4x + 6)(2x + 3)^2 - 2(2x^2 + 6x + 4)(2x + 3)}{(2x + 3)^4} = \frac{4x^2 + 12x + 10}{(2x + 3)^3}.$$

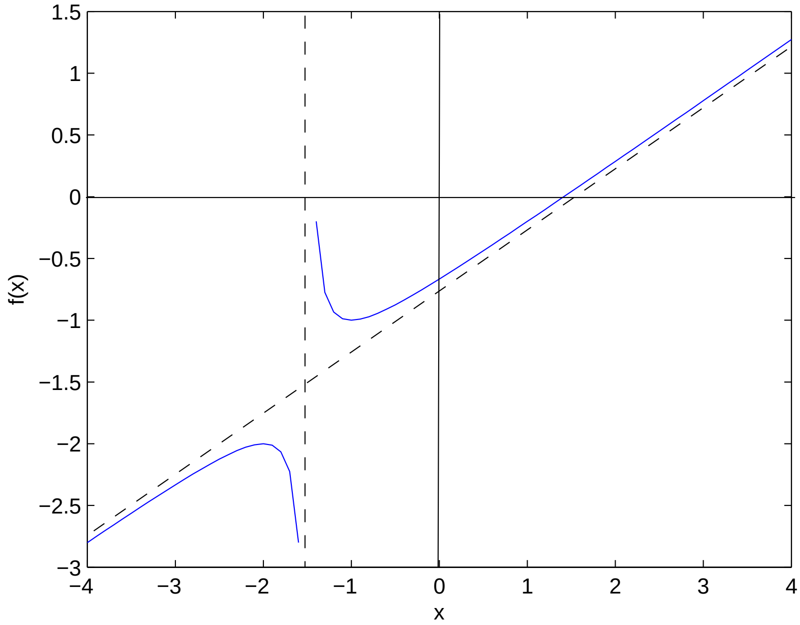
Ker je $f''(-2) = -2 < 0$, je v $x_4 = -2$ lokalni maksimum in $f(-2) = -2$. Podobno, ker je $f''(-1) = 2 > 0$, je v $x_5 = -1$ lokalni minimum in $f(-1) = -1$.

Naloga 4 (20 točk)
Izračunaj naslednji integral:

$$\int_0^2 \frac{x^2 + 2}{x^2 + 4}\, dx$$

Ker sta stopnji polinomov v števcu in v imenovalcu enaki, delimo:

$$(x^2 + 2) : (x^2 + 4) = 1 \text{ (ostanek pri deljenju je } -2\text{).}$$



Sledi

$$\int_0^2 \frac{x^2+2}{x^2+4}\,dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{2}{x^2+4}\right) dx = [x - \frac{2}{2}\arctan\frac{x}{2}]_0^2 = 2 - \arctan 1 = 2 - \frac{\pi}{4} = \frac{8-\pi}{4}.$$

Naloga 5 (20 točk)

Izračunaj ploščino lika, omejenega z grafom funkcije $g(x) = x\sin(2x)$, abscisno osjo ter premicama $x = 0$ in $x = \frac{\pi}{2}$.

Ploščina lika, ki ga omejujejo graf funkcije $g(x) = x\sin(2x)$, ki je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ nenegativna, abscisna os ter premici $x = 0$ in $x = \frac{\pi}{2}$, je enaka določenemu integralu funkcije $g(x)$:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\,dx = [-\frac{1}{2}x\cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}[\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Integral smo izračunali z integracijo po delih (per partes):

$$u = x \implies du = dx$$

$$dv = \sin(2x)\,dx \implies v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

REŠITVE B skupina

Naloga 1 (20 točk)

Določi podmnožico realnih števil, ki zadošča neenačbi

$$2 + |x - 4| \leq 8.$$

Neenakost poenostavimo v $|x - 4| \leq 6$. *Glede na predznak izraza pod absolutno vrednostjo ločimo dve možnosti:*

- $x - 4 \geq 0$ *(*$x \geq 4$*)*
  V tem primeru dobimo neenačbo: $x - 4 \leq 6$ *oz.* $x \leq 10$. *Torej, prva delna rešitev je* $R_1 = (-\infty, 10] \cap [4, \infty) = [4, 10]$.
- $x - 4 < 0$ *(*$x < 4$*)*
  V tem primeru dobimo neenačbo: $-(x - 4) \leq 6$ *oz.* $-x \leq 2$. *Torej,* $x \geq -2$. *Sledi, druga delna rešitev je* $R_2 = [-2, \infty) \cap (-\infty, 4) = [-2, 4)$.

Rešitev neenačbe je $R_1 \cup R_2 = [4, 10] \cup [-2, 4) = [-2, 10]$.

Naloga 2 (20 točk)

Ugotovi, od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \frac{3^n + 3}{3^n}$$

razlikujejo od limite za manj kot 3^{-5}.

Najprej izračunajmo limito zaporedja s splošnim členom a_n*:*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 3}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{3^n} + \frac{3}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}{1} = 1.$$

Da se členi zaporedja razlikujejo od limite $a = 1$ *za manj kot* 3^{-5}, *zapišemo kot*

$$|a_n - 1| < 3^{-5}.$$

Računamo:

$$|a_n - 1| = |\frac{3^n + 3}{3^n} - 1| = |\frac{3}{3^n}| = \frac{1}{3^{n-1}} = 3^{1-n} < 3^{-5}.$$

Dobljena neenakost

$$3^{1-n} < 3^{-5}$$

bo izpolnjena za $1 - n < -5$ oz. $n > 6$. Torej, od 7. člena dalje se vsi členi zaporedja razlikujejo od limite za manj kot 3^{-5}.

Naloga 3 (20 točk)

Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \frac{2 - x^2}{2x + 3}$$

in nariši njen graf. Določi tudi ničle, pole, začetno vrednost, asimptoto in ekstreme funkcije f.

Definicijsko območje racionalne funkcije $f(x)$ je $D_f = (-\infty, \infty) - \{-\frac{3}{2}\}$, tj. vsa realna števila, razen $-\frac{3}{2}$.

Ničle so rešitve enačbe $2 - x^2 = 0$, torej $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$.

Poli so rešitve enačbe $2x + 3 = 0$, torej $x_3 = -\frac{3}{2}$.

Začetna vrednost: $f(0) = \frac{2}{3}$.

Asimptoto dobimo pri deljenju polinoma v števcu s polinomom v imenovalcu racionalne funkcije:

$(2 - x^2) : (2x + 3) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ *(ostanek pri deljenju je $-\frac{1}{4}$).*

Kandidati za ekstreme so stacionarne točke, tj. ničle funkcije $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{-2x(2x+3) - (2-x^2)2}{(2x+3)^2} = \frac{-2x^2 - 6x - 4}{(2x+3)^2} = \frac{-2(x+2)(x+1)}{(2x+3)^2}.$$

Dobimo dve stacionarni točki: $x_4 = -2$, $x_5 = -1$. Njuno naravo določimo z drugim odvodom:

$$f''(x) = \frac{(-4x-6)(2x+3)^2 + 2(2x^2+6x+4)(2x+3)}{(2x+3)^4} = \frac{-2(2x^2+6x+5)}{(2x+3)^3}.$$

Ker je $f''(-2) = 2 > 0$, je v $x_4 = -2$ lokalni minimum in $f(-2) = 2$. Podobno, ker je $f''(-1) = -2 < 0$, je v $x_5 = -1$ lokalni maksimum in $f(-1) = 1$.

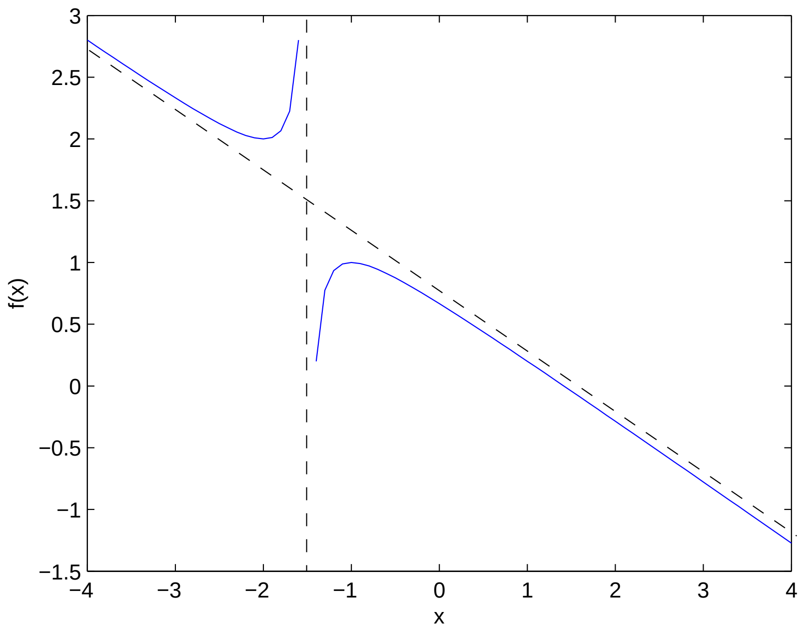
Naloga 4 (20 točk)

Izračunaj naslednji integral:

$$\int_0^2 \frac{x^2+6}{x^2+4}\,dx$$

Ker sta stopnji polinomov v števcu in v imenovalcu enaki, delimo:

$$(x^2 + 6) : (x^2 + 4) = 1 \text{ (ostanek pri deljenju je 2).}$$



Sledi

$$\int_0^2 \frac{x^2+6}{x^2+4}\,dx = \int_0^2 \left(1+\frac{2}{x^2+4}\right)dx = [x+\frac{2}{2}\arctan\frac{x}{2}]_0^2 = 2+\arctan 1 = 2+\frac{\pi}{4} = \frac{8+\pi}{4}.$$

Naloga 5 (20 točk)

Izračunaj ploščino lika, omejenega z grafom funkcije $g(x) = x\cos(2x)$, abscisno osjo ter premicama $x = 0$ in $x = \frac{\pi}{4}$.

Ploščina lika, ki ga omejujejo graf funkcije $g(x) = x\cos(2x)$, ki je na intervalu $[0, \frac{\pi}{4}]$ nenegativna, abscisna os ter premici $x = 0$ in $x = \frac{\pi}{4}$, je enaka določenemu integralu funkcije $g(x)$:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\,dx = [\frac{1}{2}x\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\,dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}[\cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi-2}{8}.$$

Integral smo izračunali z integracijo po delih (per partes):

$$u = x \implies du = dx$$

$$dv = \cos(2x)\,dx \implies v = \frac{1}{2}\sin(2x)$$