KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Visokošolski študij

11. januar 2008

1. [10T] Izračunajte
$$(2\sqrt{3}-2i)^{17}.$$

Rešitev:
Kompleksno število $2\sqrt{3}-2i$ najprej zapišemo v polarni obliki. Ker je $x=2\sqrt{3}$ in $y=-2$, je:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}=4, \\ \varphi &= \arctan\tfrac{y}{x} = -\arctan\tfrac{\sqrt{3}}{3} = -\tfrac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Torej je
$$2\sqrt{3}-2i = 4\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\right)$$

Sedaj uporabimo DeMoivreovo formulo:

$$\begin{aligned} (2\sqrt{3}-2i)^{17} &= 4^{17}\left(\cos\left(\tfrac{17\pi}{6}\right)-i\sin\left(\tfrac{17\pi}{6}\right)\right) \\ &= 4^{17}\left(\cos\left(\tfrac{5\pi}{6}\right)-i\sin\left(\tfrac{5\pi}{6}\right)\right) \\ &= 4^{17}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{i}{2}\right) \end{aligned}$$

2. [10T] Izračunajte
$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x-7}-1)\sqrt{x}}{\sqrt{3x-8}-2}.$$

Rešitev:
Če vstavimo $x=4$ v gornji izraz, dobimo izraz oblike $\frac{0}{0}$. Limito lahko rešimo na dva različna načina.

a) Z L'Hospitalovim pravilom:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x-7}-1)\sqrt{x}}{\sqrt{3x-8}-2} &= \lim_{x\to 4}\frac{\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{2x-7}}+\frac{(\sqrt{2x-7}-1)}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2\sqrt{3x-8}}} \\ &= \frac{\sqrt{3x-8}(4x-7-\sqrt{2x-7})}{3\sqrt{2x-7}\sqrt{x}} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

b) S formulo za razliko kvadratov:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x-7}-1)\sqrt{x}}{\sqrt{3x-8}-2} &= \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x-7}-1)(\sqrt{2x-7}+1)(\sqrt{3x-8}+2)\sqrt{x}}{(\sqrt{3x-8}-2)(\sqrt{3x-8}+2)(\sqrt{2x-7}+1)} \\ &= \frac{2(x-4)(\sqrt{3x-8}+2)\sqrt{x}}{3(x-4)(\sqrt{2x-7}+1)} \\ &= \frac{2(\sqrt{3x-8}+2)\sqrt{x}}{3(\sqrt{2x-7}+1)} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

3. [10T] Izračunajte ekstreme funkcije

$$f(x) = x^2 e^{-2x}.$$

Rešitev:
Funkcijo najprej odvajamo:

$$f'(x) = 2xe^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} = 2x(1-x)e^{-2x}.$$

Stacionarne točke so tam, kjer je prvi odvod enak 0, torej pri $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$. Za klasifikacijo stacionarnih točk potrebujemo drugi odvod:

$$f''(x) = 2e^{-2x} - 8xe^{-2x} + 4x^2 e^{-2x} = 2(2x^2 - 4x + 1)e^{-2x}.$$

Ker je $f''(0) = 2 > 0$, je v točki $x_1 = 0$ lokalni minimum, in ker je $f''(1) = -2e^{-2} < 0$, je v točki $x_2 = 1$ lokalni maksimum.

4. [10T] Izračunajte

$$\int 5xe^{2x}\,dx.$$

Rešitev:
Integral izračunamo z metodo per partes. Vzamemo $u = 5x$ in $dv = e^{2x}dx$, torej je $du = 5dx$ in $v = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int 5xe^{2x}\,dx = \frac{5x}{2}e^{2x} - \frac{5}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{5x}{2}e^{2x} - \frac{5}{4}e^{2x} + C$$

5. [10T] Izračunajte ploščino lika, ki je omejen s krivuljo

$$y = \frac{5x-11}{x^2-5x+4},$$

premicama $x = 5$ in $x = 7$ ter abscisno osjo.

Rešitev:
Ploščino izračunamo s pomočjo določenega integrala:

$$\begin{aligned}
S &= \int_5^7 \frac{5x-11}{x^2-5x+4}\,dx = \int_5^7 \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-4}\right)dx \\
&= \left(2\ln|x-1| + 3\ln|x-4|\right)\Big|_5^7 = 2\ln 6 - 2\ln 4 + 3\ln 3 - 3\ln 1 \\
&= \ln\tfrac{243}{4}
\end{aligned}$$

Ulomek pod integralom razbijemo na parcialne ulomke:

$$\frac{5x-11}{x^2-5x+4} = \frac{5x-11}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} = \frac{(A+B)x - 4A - B}{(x-1)(x-4)}$$

Dobimo sistem enačb $A + B = 5$ in $-4A - B = -11$, ki ima rešitev $A = 2$ in $B = 3$.

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Visokošolski študij

11. januar 2008

1. [10T] Izračunajte
$$(2-2i\sqrt{3})^{13}.$$

Rešitev:
Kompleksno število $2-2i\sqrt{3}$ najprej zapišemo v polarni obliki. Ker je $x=2$ in $y=-2\sqrt{3}$, je:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}=4, \\ \varphi &= \arctan\tfrac{y}{x} = -\arctan\sqrt{3} = -\tfrac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Torej je
$$2-2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right)$$

Sedaj uporabimo DeMoivreovo formulo:

$$\begin{aligned} (2-2i\sqrt{3})^{13} &= 4^{13}\left(\cos\left(\tfrac{13\pi}{3}\right)-i\sin\left(\tfrac{13\pi}{3}\right)\right) \\ &= 4^{13}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 4^{13}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

2. [10T] Izračunajte
$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x-5}-1)\sqrt{x}}{\sqrt{3x-5}-2}.$$

Rešitev:
Če vstavimo $x=3$ v gornji izraz, dobimo izraz oblike $\frac{0}{0}$. Limito lahko rešimo na dva različna načina.

a) Z L'Hospitalovim pravilom:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x-5}-1)\sqrt{x}}{\sqrt{3x-5}-2} &= \lim_{x\to 3}\frac{\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{2x-5}}+\frac{(\sqrt{2x-5}-1)}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}} \\ &= \frac{\sqrt{3x-5}(4x-5-\sqrt{2x-5})}{3\sqrt{2x-5}\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

b) S formulo za razliko kvadratov:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x-5}-1)\sqrt{x}}{\sqrt{3x-5}-2} &= \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x-5}-1)(\sqrt{2x-5}+1)(\sqrt{3x-5}+2)\sqrt{x}}{(\sqrt{3x-5}-2)(\sqrt{3x-5}+2)(\sqrt{2x-5}+1)} \\ &= \frac{2(x-3)(\sqrt{3x-5}+2)\sqrt{x}}{3(x-3)(\sqrt{2x-5}+1)} \\ &= \frac{2(\sqrt{3x-5}+2)\sqrt{x}}{3(\sqrt{2x-5}+1)} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

3. [10T] Izračunajte ekstreme funkcije

$$f(x) = x^2 e^{-4x}.$$

Rešitev:

Funkcijo najprej odvajamo:

$$f'(x) = 2xe^{-4x} - 4x^2 e^{-4x} = 2x(1-2x)e^{-4x}.$$

Stacionarne točke so tam, kjer je prvi odvod enak 0, torej pri $x_1 = 0$ in $x_2 = \frac{1}{2}$. Za klasifikacijo stacionarnih točk potrebujemo drugi odvod:

$$f''(x) = 2e^{-4x} - 16xe^{-4x} + 16x^2 e^{-4x} = 2(8x^2 - 8x + 1)e^{-4x}.$$

Ker je $f''(0) = 2 > 0$, je v točki $x_1 = 0$ lokalni minimum, in ker je $f''(\frac{1}{2}) = -2e^{-2} < 0$, je v točki $x_2 = \frac{1}{2}$ lokalni maksimum.

4. [10T] Izračunajte

$$\int 4xe^{3x}\, dx.$$

Rešitev:

Integral izračunamo z metodo per partes. Vzamemo $u = 4x$ in $dv = e^{3x}dx$, torej je $du = 4dx$ in $v = \frac{1}{3}e^{3x}$.

$$\int 4xe^{3x}\, dx = \frac{4x}{3}e^{3x} - \frac{4}{3}\int e^{3x}\, dx = \frac{4x}{3}e^{3x} - \frac{4}{9}e^{3x} + C$$

5. [10T] Izračunajte ploščino lika, ki je omejen s krivuljo

$$y = \frac{5x-14}{x^2-4x+3},$$

premicama $x = 4$ in $x = 6$ ter abscisno osjo.

Rešitev:

Ploščino izračunamo s pomočjo določenega integrala:

$$\begin{aligned} S &= \int_4^6 \frac{5x-14}{x^2-4x+3}\, dx = \int_4^6 \left(\frac{\frac{9}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-3} \right) dx \\ &= \left(\tfrac{9}{2}\ln|x-1| + \tfrac{1}{2}\ln|x-3| \right) \Big|_4^6 = \tfrac{9}{2}\ln 5 - \tfrac{9}{2}\ln 3 + \tfrac{1}{2}\ln 3 - \tfrac{1}{2}\ln 1 \\ &= \ln \tfrac{5^{9/2}}{81} \end{aligned}$$

Ulomek pod integralom razbijemo na parcialne ulomke:

$$\frac{5x-14}{x^2-4x+3} = \frac{5x-14}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x - 3A - B}{(x-1)(x-3)}$$

Dobimo sistem enačb $A + B = 5$ in $-3A - B = -14$, ki ima rešitev $A = \frac{9}{2}$ in $B = \frac{1}{2}$.