REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Poiščite vsa kompleksna števila $z = a + ib$, ki zadoščajo enačbi

$$|z| + \overline{z} = 3 - i.$$

V enačbo vstavimo $z = a + ib$ in dobimo:

$$\begin{aligned} |a+ib| + \overline{a+ib} &= 3 - i, \\ \sqrt{a^2+b^2} + a - ib &= 3 - i. \end{aligned}$$

Dobljeno enačbo rešimo tako, da izenačimo realni in imaginarni komponenti na obeh straneh enačbe:

$$\begin{aligned} \Re &: \sqrt{a^2+b^2} + a = 3, \\ \Im &: \; -b = -1. \end{aligned}$$

Sledi $b = 1$ in

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2+1} + a &= 3, \\ \sqrt{a^2+1} &= 3 - a, \\ a^2 + 1 &= (3-a)^2, \\ a^2 + 1 &= 9 - 6a + a^2, \\ 6a &= 8, \\ a &= \frac{8}{6} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Dobimo eno samo rešitev enačbe, to je $z = a + ib = \frac{4}{3} + i$.

Naloga 2 (20 točk)

Dano je zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \frac{n}{1+2n}.$$

Določite najmanjši in največji člen zaporedja (če obstajata) ter infimum in supremum.

Najmanjši in največji člen zaporedja najlažje določimo tako, da najprej ugotovimo, kdaj zaporedje pada in kdaj narašča. Izračunamo na primer razliko dveh zaporednih členov:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{1+2(n+1)} - \frac{n}{1+2n} = \frac{n+1}{3+2n} - \frac{n}{1+2n} = \frac{(n+1)(1+2n) - n(3+2n)}{(3+2n)(1+2n)} \\ &= \frac{1}{(3+2n)(1+2n)} > 0 \quad \textit{za vsako naravno število } n \end{aligned}$$

Sledi, da zaporedje povsod (za vsa naravna števila n) strogo narašča. To pa pomeni, da je najmanjši člen zaporedja in hkrati infimum prvi člen $a_1 = \frac{1}{3}$:

$$\min_n a_n = \inf_n a_n = a_1 = \frac{1}{3}.$$

Največji člen (strogo naraščajočega) zaporedja ne obstaja, supremum pa je enak limiti zaporedja:

$$\sup_n a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+2n} = \frac{1}{2}.$$

Naloga 3 (20 točk)

Dani sta funkciji

$$f(x) = 1 + 3x \quad \text{in} \quad g(x) = \frac{2x+3}{x-2}.$$

a.) Poiščite inverzno funkcijo $f^{-1}(x)$ k funkciji $f(x)$.

b.) Določite kompozicijo $(f \circ g)(x)$.

c.) Narišite graf funkcije $g(x)$. V ta namen poiščite ničlo, pol, začetno vrednost in asimptoto funkcije $g(x)$.

Gremo po vrsti.

a.) Najprej izračunajmo inverzno funkcijo f^{-1} k funkciji f. Dobimo jo tako, da v predpisu funkcije f zamenjamo vlogi spremenljivk x in $y = f(x)$:

$$x = 1 + 3y,$$
$$y = \frac{x-1}{3}.$$

Inverz je zato enak $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$.

b.) Sedaj izračunajmo kompozicijo funkcij f in g (v danem vrstnem redu):

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2x+3}{x-2}\right) = 1+3\left(\frac{2x+3}{x-2}\right) = \frac{x-2+6x+9}{x-2} = \frac{7(x+1)}{x-2}.$$

c.) Za konec narišimo še graf racionalne funkcije $g(x)$. Ničlo dobimo kot rešitev enačbe $2x+3=0$, torej

$$N: \; x_1 = -\frac{3}{2}.$$

Pol dobimo kot rešitev enačbe $x-2=0$, torej

$$P: \; x_2 = 2.$$

Začetna vrednost je enaka

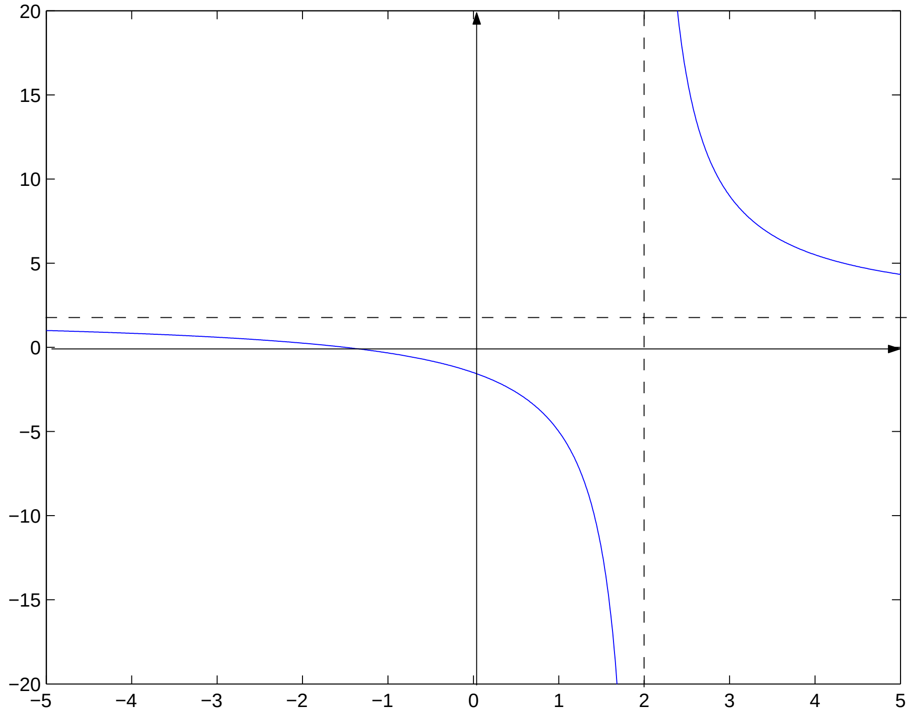
$$g(0) = -\frac{3}{2}.$$

Asimptoto funkcije $g(x)$ dobimo z deljenjem polinomov v števcu in imenovalcu racionalne funkcije:

$$(2x+3) : (x-2) = 2 + \frac{7}{x-2}.$$

Dobili smo torej asimptoto

$$A: \; y = 2.$$



Naloga 4 (20 točk)

Poiščite lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} - \arctan x$$

in določite njihovo naravo.

Kandidati za lokalne ekstreme so stacionarne točke funkcije, ki jih dobimo, ko prvi odvod funkcije izenačimo z 0. Izračunajmo torej prvi odvod funkcije $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (\sqrt{1+x^2})' - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)'\right) - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right) - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x-1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Dobimo enačbo za stacioanrne točke:

$$\frac{x-1}{1+x^2} = 0,$$

katere edina rešitev je $x = 1$ (ulomek je enak 0, ko je števec enak 0). Naravo stacionarne točke (lokalni minimum, lokalni maksimum ali prevoj) dobimo iz predznaka drugega odvoda funkcije $f(x)$. Računajmo:

$$f''(x) = \left(\frac{x-1}{1+x^2}\right)' = \frac{1+x^2-(x-1)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+2x-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Ker je

$$f''(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0,$$

ima funkcija $f(x)$ v stacionarni točki $x = 1$ lokalni minimum.

Naloga 5 (20 točk)

Izračunajte nedoločeni in določeni integral:

a.) $\displaystyle\int (1 + xe^{-2x})\, dx$

b.) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{1-x^2}\, dx$

Prvi, nedoločeni integral lahko izračunamo s pomočjo metode integriranja po delih (per partes), drugega (določenega) pa z uvedbo nove spremenljivke.

a.) V drugem delu integrala uporabimo metodo integriranja po delih, kjer vzamemo:

$$u = x \Rightarrow du = dx,$$
$$dv = e^{-2x}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}e^{-2x}.$$

Sedaj dobimo:

$$\begin{aligned}\int (1 + xe^{-2x})\, dx = \int 1\, dx + \int xe^{-2x}\, dx &= x + \left(uv - \int v\, du\right)\\ &= x + \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\, dx\right)\\ &= x - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.\end{aligned}$$

b.) Najprej izračunajmo nedoločeni integral

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,dx.$$

Če uvedemo novo spremenljivko $t = 1 - x^2$, *dobimo* $dt = -2x\,dx$ *in zato*

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2}}{t}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C.$$

Sledi še izračun določenega integrala:

$$\int_2^3 \frac{x}{1-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|\right]_2^3 = -\frac{1}{2}\ln 8 + \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{8}.$$