KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I

Visokošolski študij

15. januar 2010

1. [20T] Poenostavite izraz

$$\mathrm{i}^{2009} + \tfrac{29}{2-5\mathrm{i}} - (2+\mathrm{i})(1-3\mathrm{i}) + (3-2\mathrm{i})^2.$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^{2009} + \tfrac{29}{2-5\mathrm{i}} - (2+\mathrm{i})(1-3\mathrm{i}) + (3-2\mathrm{i})^2 &= \mathrm{i} + \tfrac{29(2+5\mathrm{i})}{4+25} - (2-5\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2) + (9-12\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2) \\ &= \mathrm{i} + 2 + 5\mathrm{i} - 5 + 5\mathrm{i} + 5 - 12\mathrm{i} \\ &= 2 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

2. [20T] Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{n}{2n+3}$.

   a) Zapišite prvih 5 členov tega zaporedja.

   b) Ali je zaporedje naraščajoče? Utemeljite.

   c) Določite največji in najmanjši člen tega zaporedja, če obstajata, sicer določite supremum in infimum tega zaporedja.

   d) Izračunajte limito tega zaporedja.

Rešitev:

a) Prvih 5 členov zaporedja: $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_2 = \frac{2}{7}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{4}{11}$ in $a_5 = \frac{5}{13}$.

b) Izračunamo kvocient dveh zaporednih členov.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2n+5}}{\frac{n}{2n+3}} = \frac{(n+1)(2n+3)}{n(2n+5)} = \frac{2n^2+5n+3}{2n^2+5n} > 1$$

Zaporedje je strogo naraščajoče.

c) Ker je zaporedje strogo naraščajoče, je najmanjši člen prvi: $a_1 = \frac{1}{5}$, največji člen pa ne obstaja. Infimum je enak najmanjšemu členu, supremum pa je enak $\frac{1}{2}$.

d) Limita zaporedja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \tfrac{1}{2}.$$

3. [20T] Izračunajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x-1}.$$

Rešitev:

Funkcijo najprej odvajamo:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x+5)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-4)}{(x-1)^2}.$$

Stacionarne točke so tam, kjer je prvi odvod enak 0, torej pri $x_1 = -2$ in $x_2 = 4$. Za klasifikacijo stacionarnih točk izračunamo vrednost prvega odvoda v dveh točkah levo in desno od stacionarne točke. Ker je $f'(-3) > 0$ in $f'(-1) < 0$, je v točki $x_1 = -2$ lokalni maksimum. Ker je $f'(3) < 0$ in $f'(5) > 0$, je v točki $x_2 = 4$ lokalni minimum.

4. [20T] Dani sta premica $y = x - 3$ in parabola $y = x^2 - 4x + 3$.

   a) Določite obe presečišči.

   b) V presečišču z večjo absciso določite enačbi tangente in normale na parabolo.

   c) V presečišču z manjšo absciso določite kot med premico in parabolo.
   Namig: kot med premicama: $\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Rešitev:

a) Izenačimo predpisa za premico in parabolo:

$$\begin{aligned} x - 3 &= x^2 - 4x + 3 \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ (x-2)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

Dobimo $x_1 = 2$ in $x_2 = 3$, oz. $y_1 = -1$ in $y_2 = 0$, zato sta presečišči $T_1(2, -1)$ in $T_2(3, 0)$.

b) T_2 je presečišče z večjo absciso. Parabolo odvajamo: $y' = 2x - 4$. Smerni koeficient tangente je $k_t = y'(3) = 2$. Enačba tangente: $y = 2x - 6$.
Smerni koeficient normale je $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{2}$. Enačba normale: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

c) T_1 je presečišče z manjšo absciso. Kot med premico in parabolo je kot med premico in tangento na parabolo v dani točki. Smerni koeficient premice je $k_1 = 1$, smerni koeficient tangente pa $k_2 = y'(2) = 0$. Izračunamo kot:

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\varphi &= \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| = 1 \\ \varphi &= \tfrac{\pi}{4} \end{aligned}$$

5. [20T] Izračunajte integrala

   a)
   $$\int x \cos x \, dx,$$

   b)
   $$\int_0^1 \sqrt{1+2x}\, dx.$$

Rešitev:

a) Integral izračunamo z metodo per partes. Vzamemo $u = x$ in $dv = \cos x dx$, torej je $du = dx$ in $v = \sin x$.

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

b) Integral izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t = 1 + 2x$. Zato je $dt = 2dx$, oz. $dx = \frac{dt}{2}$, ko je $x = 0$, je $t = 1$, in ko je $x = 1$, je $t = 3$.

$$\int_0^1 \sqrt{1+2x}\, dx = \tfrac{1}{2}\int_1^3 t^{\frac{1}{2}}\, dt = \tfrac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^3 = \tfrac{1}{3}(\sqrt{27} - 1) = \sqrt{3} - \tfrac{1}{3}$$