

Kolokvij iz matematika 1 VSS.
14. januarja 2011

1. Poišči vse rešitve enačbe $3x + |x - 1| = 7$.
2. Koliko rešitev ima enačba $z^3 + 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$? Poišči vse realne rešitve.
3. Koliko je vsota vrste $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$?
4. Določi definicijsko območje funkcije $f(x) = \sqrt{\sqrt{2x-1} + 1}$.
5. Določi kompozituma $f(g(x))$ in $g(f(x))$, če je $f(x) = \sqrt{x}$ in $g(x) = x^2$. Določi definicijski območji $\mathcal{D}_{f(g(x))}$ in $\mathcal{D}_{g(f(x))}$.
6. Koliko je razlika med največjo in najmanjšo vrednostjo, ki jo zavzame funkcija $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ za $x \in \mathbb{R}$.
7. Izračunaj (posplošeni) integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.
8. Koliko je dolžina loka krivulje podane parametrično $x(t) = t$, $y(t) = 1 - t$, $t \in [0, 1]$?
9. Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane, ko se graf funkcije $f(x) = 2x$ zasučje okrog osi x , $x \in [0, 1]$.
10. Koliko je dolžina sence navpične metrske palice, če je sonce 60° nad obzorjem?

Rešitve

1. $3x + |x - 1| = 7,$

(a) $x < 1 \Rightarrow 3x - x + 1 = 7 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

(b) $x \geq 1 \Rightarrow 3x + x - 1 = 7 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$

Vidimo, da $x = 3$ ne ustreza pogoju $x < 1$, medtem ko $x = 2$, ustreza pogoju $x \geq 1$. Rešitev je $x = 2$.

2. Binomska enačba tretje stopnje $z^3 - 1 = 0$ ima natanko tri različne rešitve, ležijo na krožnici enote in tvorijo enakostranični trikotnik. Število -1 je edina realna rešitev.

3. Vsota vrste je enaka 2. $S = \frac{1}{1 - q}$, kjer je $q = \frac{1}{2}$.

4. Prvi pogoj je $2x - 1 > 0, \Rightarrow x > \frac{1}{2}$. Naslednji pogoj je $\sqrt{2x - 1} + 1 > 0$, ki ne predstavlja nobene dodatne omejitve.

5. Kompozitum $f(g(x)) = |x|$, $\mathcal{D}_{f(g(x))} = \mathbb{R}$, medtem ko je $g(f(x)) = x$, $\mathcal{D}_{g(f(x))} = [0, \infty)$.

6. Integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x} \Big|_1^{\infty} = 1$.

7. Dolžina daljice med točkama $T_0(0, 1)$ in $T_1(1, 0)$ je enaka $\sqrt{2}$.

8. Prostornina stožca $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$, kjer je $r = 1$ in $v = 1$, $\Rightarrow V = \frac{\pi}{3}$.

9. Dolžina sence je $\cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.