2. Kolokvij iz matematike 1 VSP
20. januar 2011

Prosim, da si natančno pogledate rešitve pred reklamacijo.
Ob nalogi je zapisan odstotek študentov, ki so pravilo rešili nalogo.

(1) Določi inverzno funkcijo k funkciji $f(x) = 3 - 2/x$ in določi njuni definicijski območji.
Rešitev: 23 %

$$f^{-1}(x) = \frac{2}{3-x}, \quad \mathcal{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathbf{R} \setminus \{3\}$$

(2) Določi kompozitum $F(x) = g(f(x))$, če je $f(x) = \frac{1}{x}$ in $g(x) = \frac{x}{1+x}$. Določi definicijsko območje funkcije $F(x)$.
Rešitev: 7 %

$$F(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x+1}, \quad \mathcal{D} = \mathbf{R} \setminus \{0, -1\}$$

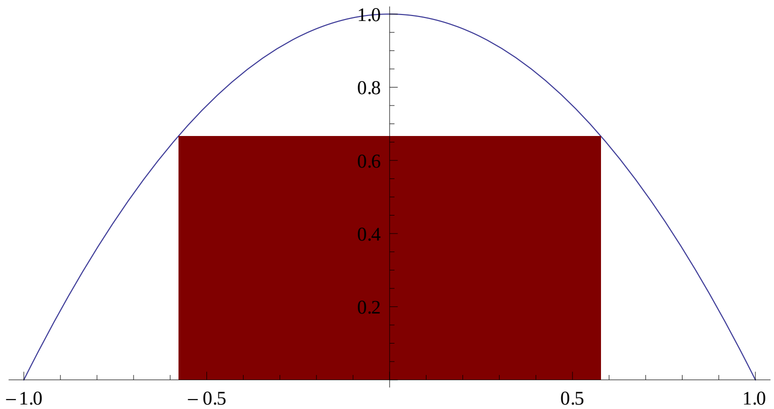
(3) Določi linearno funkcijo $f(x)$, če je $f(2) = 1$ in $f(3) = -1$.
Rešitev: 50 %

$$y - 1 = \frac{-1-1}{3-2}(x-2) \to y = -2(x-1) + 1 \to y = -2x + 5,$$

(4) V območje, ki ga omejujeta parabola $f(x) = 1 - x^2$ in os x, včrtamo pravokotnik z eno stranica na osi x. Poišči pravokotnik z največjo ploščino. Kolikšna je ta ploščina?
Rešitev: 4 %

$$P = 2x\,y = 2x\,(1 - x^2), \quad \frac{dP}{dx} = 2 - 6x^2 = 0, \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$P = 2\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

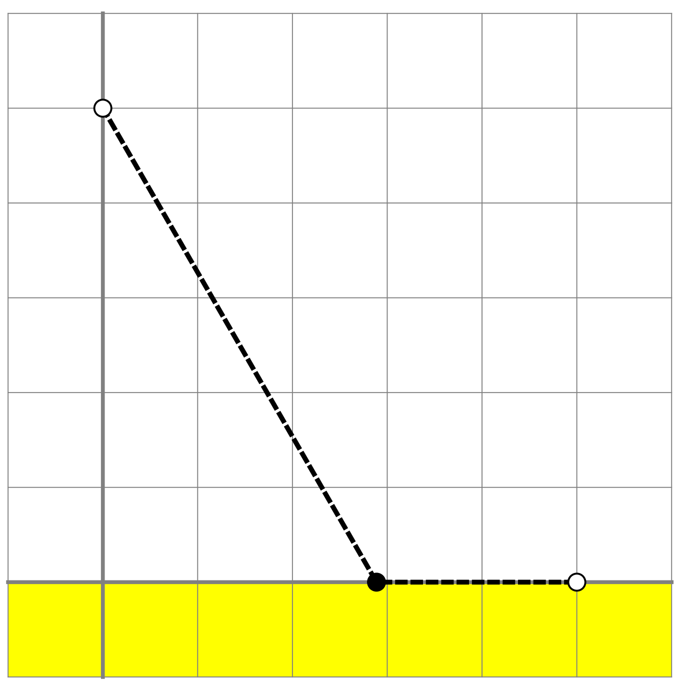


(5) Os x prestavlja obalo mejo med kopnim in morjem. Zgoraj je morje, spodaj je kopno. Otok se nahaja v točki $T_1(0,5)$, mesto na obali pa v točki $T_2(5,0)$. Potovanje se začne na otoku in konča v mestu. Hitrost potovanja po kopnem je dvakratnik hitrosti potovanja po vodi. Določi pot, za katero se porabi najmanj časa. Iščemo mesto pristanka na obali.

Rešitev: 1 %

$$C = 2\sqrt{d^2 + x^2} + d - x, \quad \frac{dC}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{d^2 - x^2}} - 1 = 0$$

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}}, \quad T_3 = (\frac{5}{\sqrt{3}}, 0).$$



(6) Dana je funkcija $f(x) = xe^{-x}$.

- Določi stacionarno točko in
- izračunaj integral $\int_0^{\hat{x}} f(x)\, dx$, kjer je $\hat{x}$ stacionarna točka.

Rešitev: 21 %

$$f(x) = xe^{-x}, \quad f'(x) = e^{-x}(1-x), \quad f'(x) = 0, \quad \hat{x} = 1. \to$$
$$\int_0^1 f(x)\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

(7) Izračunaj $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}\,dx$.
Rešitev: 27 %

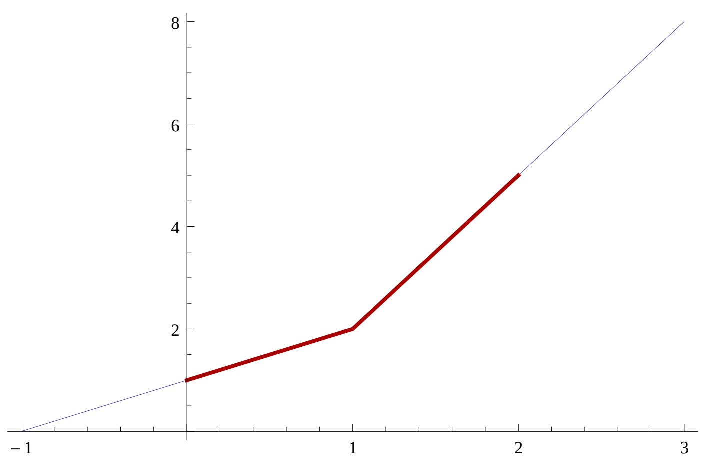
$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4}, \to t = x^2, \to$$
$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctan(t)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

(8) Določi prostornino vrtenine, ki nastane z rotacijo dela parabole $f(x) = 1 - x^2$, $-1 \le x \le 1$, okoli osi x.
Rašitev: 36 %

$$\pi \int_{-1}^1 y^2\,dx = 2\pi \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \frac{16}{15}\pi$$

(9) Izračunaj dolžino loka krivulje $y = |x-1| + 2x$, $0 \le x \le 2$.
Rešitev: 8 %

$$s = \sqrt{1^2+1^2} + \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{2} + \sqrt{10}.$$



(10) Izračunaj površino vrtenine, ki nastane z vrtenjem $f(x) = 2x$ okoli osi x za $0 \le x \le 1$.
Rešitev: 59 %

$$f'(x) = 2, \quad ds = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}, \to P = 2\pi \int_0^1 y\,ds = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{5}\,ds = 2\pi\sqrt{5}\,x^2\Big|_0^1 = 2\pi\sqrt{5}.$$