1. Kolokvij iz matematike 1 VSP

23. november 2012

(1) Opiši množico rešitev enačbe $z = \frac{1}{\overline{z}}$.
Rešitev:

$$z\overline{z} = 1, \quad |z|^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Množica to:ck je krožnica s središčem, v točki $(0, 0)$ in polmerom 1.

(2) Poišči vse rešitve enačbe $z^2 = -i$.
Rešitev:

$$-i = e^{i(\frac{-3\pi}{2}+k2\pi)}, \rightarrow z_k = e^{i(\frac{-3\pi}{4}+k\pi)}, \quad k = 0, 1$$

$$z_{12} = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

(3) Od katerega člena dalje se členi zaporedja $\{a_n\}$ razlikujejo od limite za manj kot ϵ, če je $a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1}$ in $\epsilon = \frac{1}{10}$.
Rešitev:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+1} = 1.$$

$$\left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| < \frac{1}{10}, \rightarrow \frac{n-1}{n^2+1} < \frac{1}{10}, \rightarrow n^2 - 10n + 11 > 0, \quad n > 8.$$

(4) Ugotovi konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.
Rešitev:
Limita splošnega člena

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0,$$

vrsta divergira.

(5) Reši enačbo $x + |x + 1| = 3$.
Rešitev:
Za $x > -1$ je $x + x + 1 = 3$ od tod je $x = 1$.
Za $x \leq -1$ enačba nima rešitve.

(6) Vsota dveh števil je 31 njuna razlika pa je 30. Kateri sta ti dve števili? **Rešitev**:

$$x + y = 31, \quad x - y = 20, \rightarrow 2x = 61, \quad x = 30.5, \quad y = 0.5$$

(7) Poišči največji ni najmanjši člen zaporedja $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
Rešitev:

$$\min\{a_n\} = a_1 = -1, \quad \max\{a_n\} = a_2 = \frac{1}{2}.$$

(8) Izračunaj $(1-i)^{10}$.
Rešitev:

$$(1-i)^{10} = \sqrt{2}^{10} e^{i(-10\pi/4)} = -i32$$

(9) Izračunaj vsoto vrste $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^{n-1}}$.
Rešitev:

$$2^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^4}{1-\frac{2}{3}} = 48$$

(10) Določi definicijsko območje funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{x^2}}$.
Rešitev:

$$\mathcal{R} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$