2. Kolokvij iz matematike 1 VSP
18. januar 2013

(1) Določi inverzno funkcijo k funkciji $f(x) = e^{-4x}$ in določi njuni definicijski območji.

Rešitev 26 %: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}\log x$, $\mathcal{D}_{f^{-1}} = (0, \infty)$.

(2) Določi kompozitum $F(x) = g(f(x))$, če je $f(x) = \ln(x)$ in $g(x) = e^x$. Določi definicijsko območje funkcije $F(x)$.

Rešitev 20 %: $F(x) = e^{\log x}$, $\mathcal{D}_F = (0, \infty)$, $F(x) = x$.

(3) Določi linearno funkcijo $f(x)$, če je $f(2) = 1$ in $f(3) = 1$.

Rešitev 67 %: $y - 1 = \frac{1-1}{3-2}(x-3) \to y - 1 = 0 \to y = 1$.

(4) V območje, ki ga omejujeta krivulja $f(x) = x(1-x)$, $x \in [0, 1]$ in os x, včrtamo trikotnik z eno stranico na osi x s krajiščema v $x = 0$ in $x = 1$ in z vrhom na krivulji. Poišči trikotnik z največjo ploščino. Kolikšna je ta ploščina?

Rešitev 18 %: *Teme parabole* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. *Ploščina trikotnika* $S = \frac{1}{2}c\,v$, $o = 1$, $v = \frac{1}{4} \to S = \frac{1}{8}$.

(5) Os x prestavlja obalo mejo med kopnim in morjem. Zgoraj je morje, spodaj je kopno. Otok se nahaja v točki $T_1(0, 1)$, mesto na obali pa v točki $T_2(1/2, 0)$. Potovanje se začne na otoku in konča v mestu. Hitrost potovanja po kopnem je dvakratnik hitrosti potovanja po vodi. Določi pot, za katero se porabi najmanj

časa. Iščemo mesto pristanka na obali x_0.

Rešitev 4 %: *Čas potovanja*: $T(x) = 2\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} - x$. $\frac{dT}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = 0 \rightarrow$, $4x^2 = 1 + x^2 \rightarrow$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2} \rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$.

(6) Dana je funkcija $f(x) = \begin{cases} -x^2 \log x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

- Določi stacionarno točko $\hat{x} > 0$ in
- izračunaj integral $\int_0^{\hat{x}} f(x)\, dx$.

Rešitev 5 %: $f'(x) = -2x \log x - x = 0 \rightarrow x(-2\log x - 1) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
Integral izračunamo po delih: $\int -x^2 \log x = -\frac{1}{3}x^3 \log x + \frac{1}{9}x^3$.
Vstavimo meje in dobimo: $-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{e}}} x^2 \log x\, dx = \frac{5}{18e\sqrt{e}}$.

(7) Izračunaj $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\, dx$.

Rešitev 34 %: $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\, dx = \frac{1}{3}\log(1+x^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\log 2$.

(8) Določi prostornino vrtenine, ki nastane z rotacijo dela krivulje $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$, $0 \leq x \leq 1$, okoli osi x.

Rešitev 14 %: $V = \pi \int_0^1 y^2 dx \to \pi \int_0^1 \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} - 2\right) dx \to \pi\, \frac{1}{8}\left(e^{2x} - e^{-2x} - 4x\right)\Big|_0^1 \to$
$V = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8e^2} + \frac{e^2\pi}{8}$.

(9) Izračunaj dolžino loka krivulje podane parametrično
$x(t) = \cos^2(t)$ in $y(t) = \sin^2(t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

Rešitev 3 %: *Krivulja je odsek premice $x + y = 1$ v prvem kvadrantu, njena dolžina je $\sqrt{2}$.*

(10) Izračunaj površino vrtenine, ki nastane z vrtenjem krivulje podane parametrično
$x(t) = \cos(t)$ in $y(t) = \sin(t)$, okoli osi x za $0 \leq t \leq \pi$.

Rešitev 12 %: *Krivulja je lok enotske krožnice v zgornji polravnini. Rotacijsko telo je enotska krogla, njena površina je enaka 4π.*

Ogled kolokvijev je v četrtek 24. januarja 2013 ob 10.00 v sobi AS006.
Ob rešitvi je zapisan odstotek pravilno rešenih nalog.
Prosim, da študenti še pred ogledom kolokvijev natančno pogledajo potek reševanja.
Borut Jurčič Zlobec