KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I

Visokošolski študij

22. november 2013

1. [25T] Rešite enačbo
$$|x+3|-|2x-5|=-x+4.$$

Rešitev: Ločimo tri podprimere.

$$\begin{aligned} x<-3 \quad &\Rightarrow \quad -x-3+2x-5=-x+4, \text{ oz. } \ x=6, \text{ ni rešitve} \\ -3\le x<\frac{5}{2} \quad &\Rightarrow \quad x+3+2x-5=-x+4, \text{ oz. } \ x=\frac{3}{2} \\ x\ge\frac{5}{2} \quad &\Rightarrow \quad x+3-2x+5=-x+4, \text{ oz. } \ 0=-4, \text{ ni rešitve} \end{aligned}$$

Rešitev enačbe je $x=\frac{3}{2}$.

2. [25T] Dani sta kompleksni števili
$$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} \quad \text{in} \quad z_2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

a) Izračunajte število $z=\dfrac{z_1^3}{z_2}$.

b) Določite polarni koordinati števila z.

Rešitev:

a) Za izračun števila z potrebujemo formuli

$$\begin{aligned} z^n &= |z|^n\left(\cos(n\varphi)+\mathrm{i}\sin(n\varphi)\right), \\ \frac{z}{w} &= \frac{|z|}{|w|}\left(\cos(\varphi-\psi)+\mathrm{i}\sin(\varphi-\psi)\right). \end{aligned}$$

Sledi
$$z=\frac{z_1^3}{z_2}=\frac{\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}}{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{12}\right).$$

b) Polarni koordinati števila z sta $r=\frac{1}{2}$ in $\varphi=\frac{13\pi}{12}$.

3. [25T] Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n=\dfrac{n}{1+2n}$.

a) Določite, za katere indekse je dano zaporedje naraščajoče in za katere padajoče.

b) Določite največji in najmanjši člen tega zaporedja, če obstajata, sicer določite supremum in infimum danega zaporedja.

c) Ali je vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna? Odgovor utemeljite.

Rešitev:

a) Ker je

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} > 0,$$

je zaporedje strogo naraščajoče za vsak n.

b) Iz prejšnje točke sledi, da je $\min_n a_n = a_1 = \frac{1}{3}$, $\max_n a_n$ pa ne obstaja. Ker je imenovalec v splošnem členu a_n vsaj dvakrat večji od števca, je splošni člen zaporedja omejen z $\frac{1}{2}$ in velja $\inf_n a_n = \frac{1}{3}$ in $\sup_n a_n = \frac{1}{2}$.

c) Vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+2n}$ ni konvergentna, saj je razlika stopenj imenovalca in števca v splošnem členu $\mathrm{st}(q) - \mathrm{st}(p) = 0 < 2$.

4. [25T] Določite definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right) + \sqrt{x^2 - 4}.$$

Ali je dana funkcija soda oz. liha? Odgovor utemeljite.

Rešitev:

Logaritem je definiran, ko je $x^2 - 5x + 6 > 0$, kvadratni koren pa, ko je $x^2 - 4 \geq 0$. Prva neenačba

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) > 0$$

ima rešitev $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$, druga neenačba

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \geq 0$$

pa $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. Definicijsko območje je

$$\mathcal{D}_f = (-\infty, -2] \cup (3, \infty).$$

Ker je $f(-x) = \ln\left(x^2 + 5x + 6\right) + \sqrt{x^2 - 4}$, funkcija ni ne soda ne liha.