2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I

Visokošolski študij

17. januar 2014

1. [25T] Čimbolj natančno narišite graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}.$$

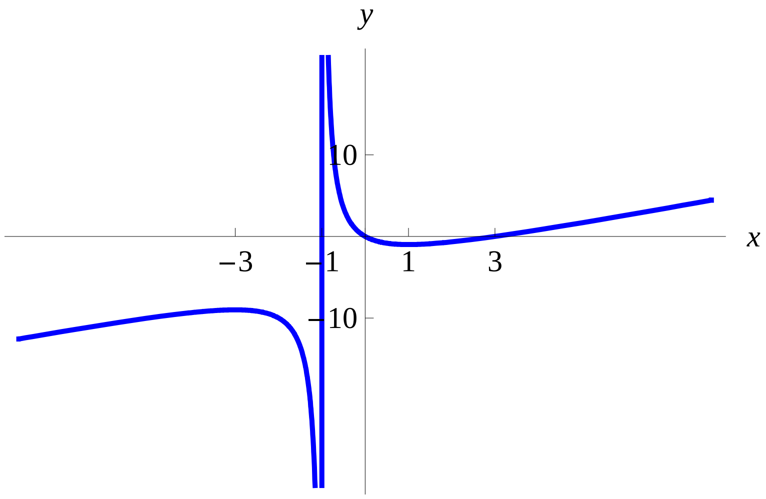
Določite še definicijsko območje funkcije $g(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 3x}{x + 1}\right)$.

NASVET: Pomagajte si z grafom funkcije $f(x)$.

Rešitev: Funkcija f ima ničli v točkah $x_1 = 0$ in $x_2 = 3$, pol v točki $x = -1$, začetno vrednost $f(0) = 0$ in poševno asimptoto $y = x - 4$, saj je $x^2 - 3x = (x + 1)(x - 4) + 4$. Odvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(x + 1) - (x^2 - 3x)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 1)^2}.$$

Stacionarni točki funkcije f sta tako $x_1 = -3$ in $x_2 = 1$. V točki $T_1(-3, -9)$ dobimo lokalni maksimum, v točki $T_2(1, -1)$ pa lokalni minimum.



Iz slike preberemo, da je definicijsko območje funkcije g enako

$$\mathcal{D}_g = (-1, 0) \cup (3, \infty)$$

2. [25T] Določite koeficienta a in b tako, da bo imel polinom

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + 2x - 5$$

v točki $T(1, -5)$ lokalni minimum.

Rešitev: Odvod polinoma ja $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + 2$. Veljati mora

$$\begin{aligned} p(1) &= a + b + 2 - 5 = -5, \\ p'(1) &= 3a + 2b + 2 = 0. \end{aligned}$$

Sistem ima rešitvi $a = 2$ in $b = -4$. Drugi odvod je $p''(x) = 6ax + 2b$. Da bo v točki lokalni minimum, mora veljati $p''(1) = 6a + 2b > 0$, kar pa je izpolnjeno.

3. [25T] Izračunajte integral
$$\int_0^1 \frac{2\mathrm{d}x}{\sqrt{4-3x}}.$$

Rešitev: V integral uvedemo novo spremenljivko $t = 4-3x$, ki ima diferencial $\mathrm{d}t = -3\mathrm{d}x$, oz. $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{3}$. Spremenimo meje: ko je $x = 0$, je $t = 4$, in ko je $x = 1$, je $t = 1$.

$$\int_0^1 \frac{2\mathrm{d}x}{\sqrt{4-3x}} = -\frac{2}{3}\int_4^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\int_1^4 t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = \frac{4}{3}$$

4. [25T] Atlet na treningu najprej pol ure teče s hitrostjo $v(t) = 9\,km/h$, nato pa pospešuje in naslednje pol ure teče s hitrostjo $v(t) = 8 + 4t^2\,km/h$, nazadnje pa se atlet v pol ure zaustavi s hitrostjo $v(t) = -24t + 36\,km/h$. Enota za čas je ura.

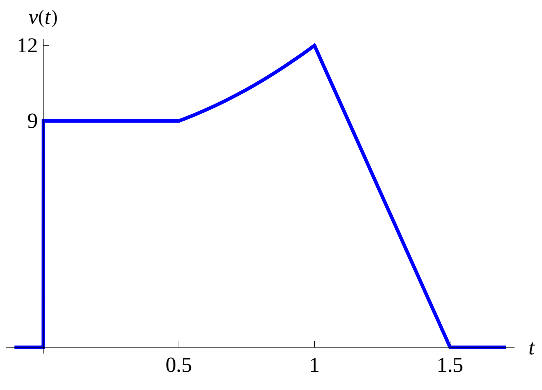
   a) Narišite graf poteka hitrosti v odvisnosti od časa.

   b) Kolikšno pot (v kilometrih) je atlet na treningu pretekel?

   NAMIG: Uporabite formulo $s = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$.

Rešitev:

a) Graf poteka hitrosti:



b) Pretečena pot:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{1}{2}} 9\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(8+4t^2\right)\mathrm{d}t + \int_1^{\frac{3}{2}} (-24t+36)\,\mathrm{d}t \\ &= 9t\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(8t + \frac{4t^3}{3}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \left(-12t^2+36t\right)\Big|_1^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{38}{3}\,km \end{aligned}$$