Matematika 2

3. vaja, funkcijske vrste

B. Jurčič Zlobec[1]

[1]Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za Elektrotehniko
1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenija

Matematika FE, Ljubljana, Slovenija 6. maj 2012

Določi konvergenčno območje vrste.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

- d'Alambertov kriterij: $D_n = \left| \frac{x^{n+1} n^2}{x^n (n+1)^2} \right| = \frac{n}{n+1} |x| \to$
- $D = \lim_{n \to \infty} D_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} |x| = |x| < 1.$
- Vrsta konvergira v notranjosti intervala $(-1, 1)$.
- Kaj je s konvergenco na robu, to je v točkah 1 in -1?
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
- Obe vrsti konvergirata. $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$.

Določi konvergenčno območje vrste

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$$

- d'Alambertov kriterij:
  $D_n = \left| \frac{(x-2)^{n+1}\sqrt{n}}{(x-2)^n\sqrt{n+1}} \right| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}|x-2| \to$
- $D = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}|x-2| = |x-2| < 1.$
- Vrsta konvergira v notranjosti intervala $(1, 3)$.
- Kaj je s konvergenco na robu, to je v točkah 3 in 1?
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
- Prva divergira, druga pogojno konvergira. $\mathcal{D}_f = [1, 3)$.

Nekaj osnovnih razvojev v okolici $x_0 = 0$

1. Eksponentna funkcija:
   $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad |x| < \infty$
2. Sinus:
   $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \qquad |x| < \infty$
3. Kosinus:
   $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad |x| < \infty$
4. Logaritem:
   $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, -1 < x \leq 1$
5. Binomska vrsta:
   $$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \qquad |x| < 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
6. Geometrijska vrsta:
   $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad |x| < 1$

Razvij funkcijo v Taylorjevo vrsto v okolici točke $x_0 = 0$ in določi konvergenčno območje.

$$f(x) = \frac{1}{4 + x^2}$$

- Izpostavimo $1/4$, $f(x) = \dfrac{1/4}{1 + x^2/4}$.
- Izraz predstavlja vsoto geometrijske vrste s kvocientom $q = -(x/2)^2$.
- $\dfrac{1/4}{1 + x^2/4} = \dfrac{1}{4}\left(1 - (\frac{x}{2})^2 + (\frac{x}{2})^4 - \dots\right) = \dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n}$.
- Kvocient geometrijske vrste mora biti manj kot 1, $|x| < 2$.
- Na robu v točkah 2 in -2 vrsta divergira.
- Konvergenčno območje: $(-2, 2)$.

Razvij funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $x_0 = 0$ do člena z x^8 in nariši graf.

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Uporabimo razvoj v binomsko vrsto.
- $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x^2 \left(1-x^2\right)^{-1/2} \to .$
- $x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-}{1} /2k x^{2k} (-1)^k =$

  $x^2 \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \dots\right)$
- $x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^6 + \frac{5}{16}x^8 + \dots$
- Konvergenčno območje je $|x| < 1$.

Razvij funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $x_0 = 0$.

$$f(x) = \arctan(x)$$

- Odvod $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
- Uporabimo razvoj v geometrijsko vrsto za $f'(x)$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.
- Vrsta konvergira za $|x| < 1$.
- Vrsto členoma integriramo $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + C$
- na $|x| < 1$. Integracijska konstanta $C = 0$, ker je $f(x) = 0$.
- Vrsta je konvergentna tudi za $x = \pm 1$, $\mathcal{D} = [-1, 1]$.

Razvij funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $x_0 = 0$.

$$f(x) = \int_0^x (e^{-t^2} - 1)\frac{dt}{t}$$

- Odvod $f'(x) = \dfrac{e^{-x^2} - 1}{x}$.
- Uporabimo razvoj eksponentne funkcije $\left(1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2!} - \dfrac{x^6}{3!} + \cdots - 1\right)\dfrac{1}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{n!}$.
- Vrsta konvergira za vse x.
- Vrsto členoma integriramo $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!2n} + C$.
- Integracijska konstanta $C = 0$, ker je $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Seštej vrsto

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

- Vzemimo potenčno vrsto $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.
- Vrsta konvergira za $|x| < 1$. Velja $S = f(\frac{1}{2})$.
- Izpostavimo x in dobimo $f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.
- Vrsto členoma integriramo in seštejemo geometrijsko vrsto.
- $\int \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + C = \frac{x}{1-x} + C$.
- $f(x) = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$. $S = f(\frac{1}{2}) = 2$.

Seštej vrsto

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

- Vzemimo potenčno vrsto $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \dfrac{1}{1+x^2}$.
- Vrsta konvergira za $|x| < 1$. Velja $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$.
- Vrsta je pogojno konvergentna na robu, v točkah $x = \pm 1$.
- Vstavimo $x = 1$ in dobimo:
- $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$. $S = \dfrac{\pi}{4}$.

Seštej vrsto

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

- Vzemimo potenčno vrsto $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. $S = f(-1)$.
- Vrsta konvergira za $|x| \leq 1$.
- Velja $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$.
- $f(x) = x + \log|1-x| - x \log|x-1|$.
- Vstavimo $x = -1$ in dobimo:
  $S = f(-1) = 2\log(2) - 1 = \log\frac{4}{e}$.

Razvoj funkcije $f(x)$ na $[-\ell, \ell]$:

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

- Splošna funkcija:
  1. $a_o = \dfrac{1}{2\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx,$
  2. $a_n = \frac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,$
  3. $b_n = \frac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx.$
- Soda funkcija:
  1. $a_o = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx,$
  2. $a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,$
  3. $b_n = 0.$
- Liha funkcija:
  1. $a_n = 0$
  2. $b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$

Razvij funkcijo $f(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

$$f(x) = 1 + \frac{x}{|x|}$$

- $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 2\,dx = 1, \quad a_n = 0, n > 0.$
- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\sin(nx)\,dx = 2\frac{1-(-1)^n}{\pi n}.$
- $b_{2n} = 0, \quad b_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)}.$
- $f(x) = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}.$

Preveri na gornjem primeru,

da je vsota vrste v točki nezveznosti x_0 funkcije $f(x)$ enaka
$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\searrow x_0} f(x) + \lim_{x\nearrow x0} f(x)\right)$.

- Točka nezveznosti je $x_0 = 0$.
- $\lim_{x\searrow 0}\left(1 + \frac{x}{|x|}\right) = 1 + 1 = 2.$
- $\lim_{x\nearrow 0}\left(1 + \frac{x}{|x|}\right) = 1 - 1 = 0.$
- $\frac{1}{2}\left(\lim_{x\searrow 0} f(x) + \lim_{x\nearrow 0} f(x)\right) = 1.$
- $1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}\Bigg|_{x=0} = 1.$

S pomočjo gornjega razvoja izračunaj vsoto vrste.

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

- $f(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}.$
- $f(\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$
- $2 = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$
- $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$

Razvij funkcijo $f(x)$ na intervalu $[-1, 1]$.

$f(x) = 1 - |x|$.

- Funkcija je soda, $b_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$.
- $a_0 = \int_0^1 (1 - x)\, dx = \frac{1}{2}$.
- $a_n = 2 \int_0^1 (1 - x) \cos(n\pi x)\, dx = \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2}$.
- $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n - 1)\pi x)}{(2n - 1)^2}$.

S pomočjo gornjega razvoja izračunaj vsoto vrste.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

- $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}.$
- $f(0) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$
- $\frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$

Razvij funkcijo $f(x)$ na intervalu $[-1, 1]$.

$f(x) = x$.

- Funkcija je liha, $a_n = 0, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $b_n = 2\int_0^1 x \sin(n\pi x)\, dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}$.
- $f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(n\pi x)}{n}$.

Preveri na gornjem primeru,

da je vsota vrste v krajiščih intervala $[-\ell, \ell]$ enaka
$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\ell} f(x) + \lim_{x\to\ell} f(x)\right)$.

- Vrednost $\ell = 1$.
- $\lim_{x\to-1} x = -1$.
- $\lim_{x\to 1} x = 1$.
- $\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-1} f(x) + \lim_{x\to 1} x\right) = 0$.
- $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin(n\pi x)}{n}\Bigg|_{x=\pm 1} = 0$.

Razvij funkcijo $f(x)$ na intervalu $[-1, 1]$.

$f(x) = x^2$.

- Funkcija je soda, $b_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$.
- $a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi x^2 \, dx = \dfrac{\pi^2}{3}$.
- $a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi x^2 \cos(nx) \, dx = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}$.
- $f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$.

S pomočjo gornjega razvoja izračunaj vsoto vrste.

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

- $f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}.$
- $f(\pi) = \pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(-1)^n}{n^2}.$
- $\dfrac{2\pi^2}{3} = 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}.$
- $\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}.$