IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (1)

1. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Dane tri množice

$$\{\{2,-1,-1\},\{0,2,2\},\{0,-1,-2\}\}$$

predstavljajo smerni vektor premice, eno točko na njej in točko izven premice. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje dano premico in dano točko. Potem pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino.

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(-3,2)$ in $(-2,3)$.

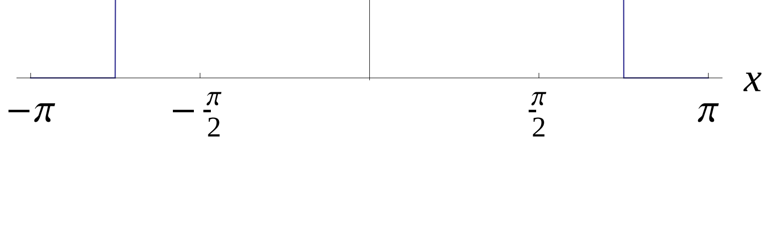
   a) Kam preslika vektor $(2,2)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(3,0)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši Taylorjevo vrsto do vključno tretje potence x-a pri razvoju okoli točke 0 in s temi členi izračunaj približno vrednost integrala funkcije $(f(x)-1)/x$ na intervalu $[0,1]$. Funkcija $f(x)$ je $\cos(x)$.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = 1$, za x, ki je absolutno manj kot $3\pi/4$, in 0 drugje, s periodo 2π.



6. Reši začetni problem

$$2y'(x) + y''(x) = \sin(x), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji

$$y'(x) - 2y(x) = 1, \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$$

8. Določi radij in višino valja z največjim volumnom, ki ga lahko včrtaš v kroglo z radijem 1.

9. Nariši nivojske krivulje $z = 1$, $z = 4$ in $z = 9$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom

$$z = 8 - 4x + x^2 + 4y + y^2.$$

10. **a)** Napiši definicijo parcialnega odvoda funkcije $z(x, y)$ na x.

    b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x, y)$?

    c) Kaj je lastni vektor matrike A?

    d) Kaj je rang matrike A?

    e) Kdaj so trije vektorji v prostoru linearno neodvisni?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (1) z rešitvami

1. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:

Lastne vrednosti izračunamo kot rešitve enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & -5 \\ 3 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda) - 5(3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+3) = 0 \end{aligned}$$

Dobimo eno dvojno lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 3$ in eno enojno lastno vrednost $\lambda_3 = -3$. Izračunajmo najprej lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_3 = -3$:

$$A - \lambda_3 I = A + 3I = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lastni vektor: $x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sedaj še lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 3$:

$$A - \lambda_{1,2} I = A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lastni vektor: $x_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. Dane tri množice

$$\{\{2,-1,-1\}, \{0,2,2\}, \{0,-1,-2\}\}$$

predstavljajo smerni vektor premice, eno točko na njej in točko izven premice. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje dano premico in dano točko. Potem pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino.

Rešitev:

Normalo ravnine dobimo kot vektorski produkt smernega vektorja premice $\vec{e} = (2, -1, -1)$ in vektorja med točko na premici in točko izven premice $\vec{r} = (0, -3, -4)$:

$$\vec{n} = \vec{e} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (1, 8, -6)$$

Enačba ravnine je torej $x + 8y - 6z = 4$.
Iskana premica, ki je pravokotna na dano ravnino, ima smerni vektor enak normali ravnine. Ker gre skozi izhodišče, se enačba v kanonični obliki glasi $x = \frac{y}{8} = \frac{z}{-6}$.

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(-3, 2)$ in $(-2, 3)$.

   a) Kam preslika vektor $(2, 2)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(3, 0)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

   Rešitev:

   Matrika transformacije je $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, ki ima inverz $A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.
   Slika vektorja $(2, 2)$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

   Vektor, ki se preslika v vektor $(3, 0)$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

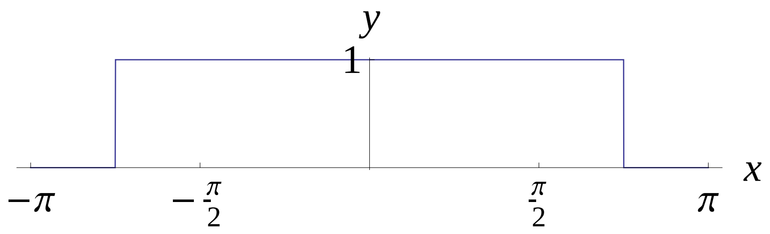
4. Napiši Taylorjevo vrsto do vključno tretje potence x-a pri razvoju okoli točke 0 in s temi členi izračunaj približno vrednost integrala funkcije $(f(x) - 1)/x$ na intervalu $[0, 1]$. Funkcija $f(x)$ je $\cos(x)$.

   Rešitev:

   Prvih nekaj členov Taylorjeve vrste za $f(x) = \cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

$$\int_0^1 \frac{\cos(x) - 1}{x} \, \mathrm{d}x \approx \int_0^1 \frac{1 - \frac{x^2}{2} - 1}{x} \, \mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x = -\frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$$

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = 1$, za x, ki je absolutno manj kot $3\pi/4$, in 0 drugje, s periodo 2π.



Rešitev:

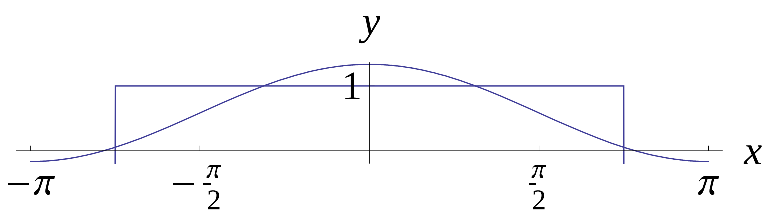
Najprej izračunajmo koeficiente. Ker je dana funkcija soda, je $b_1 = 0$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{3\pi/4} \mathrm{d}x = \frac{3}{4} \\ a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{3\pi/4} \cos x \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \end{aligned}$$

Iskana funkcija je

$$f(x) \approx a_0 + a_1 \cos x = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos x$$

Slika:



6. Reši začetni problem

$$2y'(x) + y''(x) = \sin(x), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Rešitev:

To je linearna diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti. Najprej rešimo homogeni del $y'' + 2y' = 0$ z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, ki nam da karakteristično enačbo $\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2) = 0$, ki ima rešitvi $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = -2$. Rešitev homogenega dela:

$$y_H = A + B\mathrm{e}^{-2x}$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom $y_p = C\sin x + D\cos x$. Odvajamo: $y_p' = C\cos x - D\sin x$, $y_p'' = -C\sin x - D\cos x$ in vstavimo v enačbo:

$$-C\sin x - D\cos x + 2C\cos x - 2D\sin x = \sin x$$

Primerjava koeficientov nam da sistem enačb $-C - 2D = 1$ in $2C - D = 0$, ki ima rešitev $C = -\frac{1}{5}$ in $D = -\frac{2}{5}$, zato je partikularna rešitev:

$$y_p = -\frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x$$

Splošna rešitev je vsota rešitve homogenega dela in partikularne rešitve

$$y(x) = y_p + y_H = -\frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + A + B\mathrm{e}^{-2x}$$

Da upoštevamo še začetne pogoje, rešitev odvajamo

$$y'(x) = -\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x - 2B\mathrm{e}^{-2x}$$

in vstavimo začetne pogoje

$$\begin{aligned} y(0) &= -\frac{2}{5} + A + B = 0 \\ y'(0) &= -\frac{1}{5} - 2B = 1 \end{aligned}$$

Ta sistem ima rešitev $A = 1$ in $B = -\frac{3}{5}$, torej je rešitev začetnega problema

$$y(x) = -\frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + 1 - \frac{3}{5}\mathrm{e}^{-2x}$$

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji

$$y'(x) - 2y(x) = 1, \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Rešitev:
To je linearna diferencialna enačba 1. reda. Najprej homogeni del:

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2y \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= 2\mathrm{d}x \\ \ln y &= 2x + \ln C \\ y_H &= C\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

Partikularno rešitev izračunamo z variacijo konstante: $y = C(x)\mathrm{e}^{2x}$, $y' = C'(x)\mathrm{e}^{2x} + 2C(x)\mathrm{e}^{2x}$. To vstavimo v enačbo in dobimo $C'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, kar nam da $C(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$. Partikularna rešitev je $y_p = -\frac{1}{2}$, splošna pa

$$y(x) = y_p + y_H = -\frac{1}{2} + C\mathrm{e}^{2x}$$

Upoštevamo še začetni pogoj $y(0) = -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2}$ in dobimo $C = 1$, zato

$$y(x) = -\frac{1}{2} + \mathrm{e}^{2x}$$

8. Določi radij in višino valja z največjim volumnom, ki ga lahko včrtaš v kroglo z radijem 1.

Rešitev:
Da bo valj včrtan, morata radij in višina zadoščati pogoju (Pitagorov izrek): $r^2 + \frac{v^2}{4} = 1$.

Volumen valja izračunamo po formuli $V = \pi r^2 v$.
Opravka imamo z vezanimi ekstremi, zato zapišemo novo funkcijo

$$F(r, v, \lambda) = \pi r^2 v + \lambda \left(r^2 + \frac{v^2}{4} - 1 \right),$$

ki jo odvajamo po vseh treh spremenljivkah in odvode enačimo z 0

$$\begin{aligned} F_r &= 2\pi r v + 2\lambda r = 0 \\ F_v &= \pi r^2 + \frac{\lambda v}{2} = 0 \\ F_\lambda &= r^2 + \frac{v^2}{4} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Dobljeni sistem ima rešitev $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $v = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, kar sta dimenziji valja z največjim volumnom.

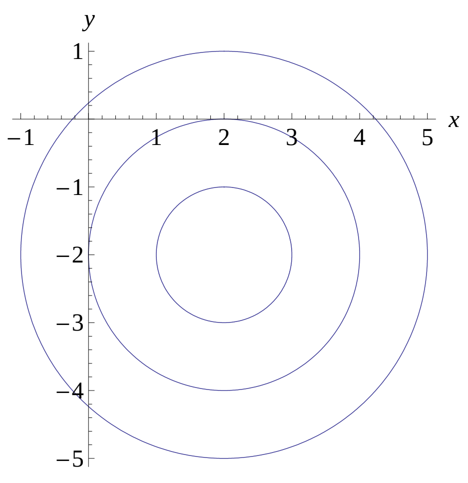
9. Nariši nivojske krivulje $z = 1$, $z = 4$ in $z = 9$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom

$$z = 8 - 4x + x^2 + 4y + y^2.$$

Rešitev:
Pri danih vrednostih za z, dobimo:

$$\begin{aligned} z = 1 &: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 1 \\ z = 4 &: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4 \\ z = 9 &: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 9 \end{aligned}$$

To pa so ravno koncentrične krožnice s središčem v točki $(2, -2)$ in radiji 1, 2 in 3.



10. **a)** Napiši definicijo parcialnega odvoda funkcije $z(x, y)$ na x.
b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x, y)$?
c) Kaj je lastni vektor matrike A?
d) Kaj je rang matrike A?
e) Kdaj so trije vektorji v prostoru linearno neodvisni?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (2)

1. Reši sistem enačb glede na možne vrednosti parametra k. Kdaj ima sistem enolično rešitev, kdaj je protisloven, kdaj ima neskončno rešitev?

$$\begin{aligned} x + (-1-k)z &= -1 - 2(1+k) \\ -2x + (-2+k)y - 2(1+k)z &= 4 - 4(1+k) \\ 2x - 2(-2+k)y + (1+k)z &= -6 + 2(1+k) \end{aligned}$$

2. Izračunaj projekcijo (kot vektor) tretjega vektorja na vektorski produkt prvih dveh vektorjev

$$\{\{1,0,0\},\{0,4,0\},\{1,1,3\}\}.$$

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(1,1)$ in $(-1,2)$.

   a) Kam preslika vektor $(1,-2)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(1,-1)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši Taylorjevo vrsto do vključno tretje potence x-a pri razvoju okoli točke 0 in s temi členi izračunaj približno vrednost integrala funkcije $(f(x)-1)/x$ na intervalu $[0,1]$. Funkcija $f(x)$ je $\sin(x)+1$.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = 1$, za x, ki je absolutno manj kot $\pi/2$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Reši začetni problem

$$2y'(x) + y''(x) = \sin(x), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji

$$2y'(x) - y(x) = \mathrm{e}^x, \qquad y(0) = 5.$$

8. Izračunaj ekstreme funkcije:

$$f(x, y) = x^2 - xy - 2x + y^2 + 4y - 1.$$

9. Nariši nivojske krivulje $z = 1$, $z = 4$ in $z = 9$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom

$$z = 18 + 6x + x^2 + 6y + y^2.$$

10. **a)** Napiši definicijo parcialnega odvoda funkcije $z(x, y)$ na x.

    b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x, y)$?

    c) Kaj je lastni vektor matrike A?

    d) Kaj je rang matrike A?

    e) Kdaj so trije vektorji v prostoru linearno neodvisni?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (3)

1. Reši sistem enačb glede na možne vrednosti parametra k. Kdaj ima sistem enolično rešitev, kdaj je protisloven, kdaj ima neskončno rešitev?

$$\begin{aligned} x + k(-1 + 4(2x + y)) &= 0 \\ y + k(2 + 2(2x + y)) &= 0 \end{aligned}$$

2. Dane tri množice

$$\{\{2, 0, -1\}, \{0, -1, 2\}, \{1, 1, 3\}\}$$

predstavljajo smerni vektor premice, eno točko na njej in točko izven premice. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje dano premico in dano točko. Potem pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino.

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(4, 0)$ in $(-2, 4)$.

a) Kam preslika vektor $(-1, 2)$?

b) Kaj se preslika v vektor $(1, -1)$?

Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši prve 3 člene binomske vrste za približni izračun n-tega korena pri $n = 2$ za $27^{\frac{1}{n}}$.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = -1$, za negativen x, ki je absolutno manj kot $\pi/2$, in je 1 za pozitiven x, ki je absolutno manj kot $\pi/2$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Reši začetni problem

$$y(x) + 2y'(x) + y''(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji

$$y'(x) - 2y(x) = 1, \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$$

8. Določi dimenzije valja z največjim volumnom, ki ga lahko včrtaš v stožec z radijem 1 in višino 2.

9. Nariši nivojske krivulje $z = 1$, $z = 4$ in $z = 9$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom
$$z = 4 + 4x + x^2 + y^2.$$

10. **a)** Napiši definicijo parcialnega odvoda funkcije $z(x, y)$ na x.
    b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x, y)$?
    c) Kaj je lastni vektor matrike A?
    d) Kaj je rang matrike A?
    e) Kdaj so trije vektorji v prostoru linearno neodvisni?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (4)

1. Reši sistem enačb glede na možne vrednosti parametra k. Kdaj ima sistem enolično rešitev, kdaj je protisloven, kdaj ima neskončno rešitev?

$$\begin{aligned} x - 2(-2+k)y + 2(2+k)z &= -2 + 2(2+k) \\ 2x + (-2+k)y + (2+k)z &= 8 + k \\ -x + (-2+k)y + (2+k)z &= 2 + k \end{aligned}$$

2. Dane tri množice

$$\{\{1,1,1\},\{0,1,2\},\{1,1,2\}\}$$

predstavljajo smerni vektor dveh vzporednih premic in po eno točko na vsaki od njih. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje ti dve premici. Nato pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino.

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(-1,-3)$ in $(-2,-4)$.

   a) Kam preslika vektor $(-2,3)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(-2,-2)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši prve 3 člene binomske vrste za približni izračun n-tega korena pri $n = 2$ za $38^{\frac{1}{n}}$.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = -1$, za negativen x, ki je absolutno manj kot $\pi/2$, in je 1 za pozitiven x, ki je absolutno manj kot $\pi/2$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Reši začetni problem

$$y(x) + 2y'(x) + y''(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji

$$2y'(x) - y(x) = \mathrm{e}^{x}, \qquad y(0) = 5.$$

8. Določi dimenzije valja z največjim volumnom, katerega površina je 6π.

9. Nariši nivojske krivulje $z = 1$, $z = 4$ in $z = 9$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom
$$z = 2 + 2x + x^2 - 2y + y^2.$$

10. **a)** Napiši definicijo parcialnega odvoda funkcije $z(x, y)$ na x.
    b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x, y)$?
    c) Kaj je lastni vektor matrike A?
    d) Kaj je rang matrike A?
    e) Kdaj so trije vektorji v prostoru linearno neodvisni?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (5)

1. Reši sistem enačb glede na možne vrednosti parametra k. Kdaj ima sistem enolično rešitev, kdaj je protisloven, kdaj ima neskončno rešitev?

$$\begin{aligned} x - 2kz &= 1 - 4k \\ -2x + (-2+k)y - 2kz &= -4k \\ -2x + (2-k)y + kz &= -4 + 2k \end{aligned}$$

2. Zapiši enačbo ravnine, ki gre skozi tri, s koordinatami podane točke. Nato pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino. Točke so:

$$\{\{2,0,0\},\{0,2,0\},\{0,0,3\}\}.$$

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(-3,2)$ in $(0,-3)$.

   a) Kam preslika vektor $(-1,-2)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(1,2)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši prve 3 člene binomske vrste za približni izračun n-tega korena pri $n = 2$ za $12^{\frac{1}{n}}$.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = -1$, za negativen x, ki je absolutno manj kot $3\pi/4$, in je 1 za pozitiven x, ki je absolutno manj kot $3\pi/4$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Reši začetni problem

$$3y'(x) + y''(x) = \mathrm{e}^x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji

$$xy'(x) - 3y(x) = x^4, \qquad y(1) = 2.$$

8. Poišči točko na grafu krivulje, ki je najbližja izhodišču. Uporabi metodo vezanega ekstrema. Krivulja je podana z implicitnim izrazom:

$$2 - 3x + 3y + (3x + 3y)^2 = 0.$$

9. Nariši nivojske krivulje $z = 1$, $z = 4$ in $z = 9$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom

$$z = 2 - 2x + x^2 + 2y + y^2.$$

10. **a)** Napiši definicijo parcialnega odvoda funkcije $z(x, y)$ na x.

    b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x, y)$?

    c) Kaj je lastni vektor matrike A?

    d) Kaj je rang matrike A?

    e) Kdaj so trije vektorji v prostoru linearno neodvisni?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (6)

1. Reši sistem enačb glede na možne vrednosti parametra k. Kdaj ima sistem enolično rešitev, kdaj je protisloven, kdaj ima neskončno rešitev?

$$\begin{aligned} x - kz &= -2 - 3k \\ -2x + (-3+k)y &= 2 \\ x - 2(-3+k)y + kz &= 2 + 3k \end{aligned}$$

2. Dane tri množice predstavljajo smerna vektorja dveh sekajočih se premic in njuno skupno točko

$$\{\{2,0,0\},\{0,2,0\},\{0,0,3\}\}.$$

Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje ti dve premici. Nato pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino.

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(1,1)$ in $(-1,3)$.

a) Kam preslika vektor $(-1,1)$?

b) Kaj se preslika v vektor $(-2,1)$?

Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši prve 3 člene binomske vrste za približni izračun n-tega korena pri $n = 2$ za $28^{\frac{1}{n}}$.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = -1$, za negativen x, ki je absolutno manj kot $\pi/2$, in je 1 za pozitiven x, ki je absolutno manj kot $\pi/2$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Reši začetni problem

$$2y(x) + 2y'(x) + y''(x) = 3, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji

$$y'(x) - \frac{2y(x)}{x} = 2x^4, \qquad y(1) = 0.$$

8. Določi radij in višino valja z največjim volumnom, ki ga lahko včrtaš v kroglo z radijem 1.

9. Nariši nivojske krivulje $z = 1$, $z = 4$ in $z = 9$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom
$$z = 1 - 2x + x^2 + y^2.$$

10. **a)** Napiši definicijo parcialnega odvoda funkcije $z(x, y)$ na x.

    b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x, y)$?

    c) Kaj je lastni vektor matrike A?

    d) Kaj je rang matrike A?

    e) Kdaj so trije vektorji v prostoru linearno neodvisni?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (7)

1. Reši sistem enačb glede na možne vrednosti parametra k. Kdaj ima sistem enolično rešitev, kdaj je protisloven, kdaj ima neskončno rešitev?

$$\begin{aligned} x + (1-k)y - 2kz &= 2 - 6k \\ x + (-1+k)y &= 0 \\ 2x + kz &= 2 + 3k \end{aligned}$$

2. Zapiši enačbo ravnine, ki gre skozi tri,s koordinatami podane točke. Nato pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino. Točke so:

$$\{\{1,0,0\},\{0,1,0\},\{0,0,2\}\}.$$

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(4,-1)$ in $(0,-3)$.

   a) Kam preslika vektor $(-1,-2)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(-1,2)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši prve 3 člene binomske vrste za približni izračun n-tega korena pri $n=2$ za $27^{\frac{1}{n}}$.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = -1$, za negativen x, ki je absolutno manj kot $\pi/2$, in je 1 za pozitiven x, ki je absolutno manj kot $\pi/2$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Reši začetni problem

$$2y'(x) + y''(x) = x + 2, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji

$$xy'(x) - 3y(x) = x^4, \qquad y(1) = 2.$$

8. Poišči točko na grafu krivulje, ki je najbližja izhodišču. Uporabi metodo vezanega ekstrema. Krivulja je podana z implicitnim izrazom:

$$1 - 2x + 4y + (4x + 2y)^2 = 0.$$

9. Nariši nivojske krivulje $z = 1$, $z = 4$ in $z = 9$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom

$$z = 10 + 2x + x^2 + 6y + y^2.$$

10. **a)** Napiši definicijo parcialnega odvoda funkcije $z(x, y)$ na x.

    b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x, y)$?

    c) Kaj je lastni vektor matrike A?

    d) Kaj je rang matrike A?

    e) Kdaj so trije vektorji v prostoru linearno neodvisni?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (8)

1. Reši sistem enačb glede na možne vrednosti parametra k. Kdaj ima sistem enolično rešitev, kdaj je protisloven, kdaj ima neskončno rešitev?

$$\begin{aligned} x+(-2+k)y+(-2-k)z &= -2-3(2+k) \\ (-2+k)y-2(2+k)z &= -1-6(2+k) \\ -2x+(-2+k)y+(2+k)z &= 3(2+k) \end{aligned}$$

2. Dane tri množice

$$\{\{2,2,2\},\{0,1,2\},\{-1,-2,2\}\}$$

predstavljajo smerni vektor premice, eno točko na njej in točko izven premice. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje dano premico in dano točko. Potem pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino.

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(3,0)$ in $(1,3)$.

   a) Kam preslika vektor $(-2,-2)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(3,-1)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši prve 3 člene binomske vrste za približni izračun n-tega korena pri $n=3$ za $219^{\frac{1}{n}}$.

5. Nariši graf funkcije $a_0+a_1\cos x+b_1\sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x)=-1$, za negativen x, ki je absolutno manj kot $3\pi/4$, in je 1 za pozitiven x, ki je absolutno manj kot $3\pi/4$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Reši začetni problem

$$2y'(x)+y''(x)=x+2, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$$

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji

$$xy(x)+y'(x)=x, \qquad y(0)=1.$$

8. Izračunaj ekstreme funkcije:

$$f(x,y) = x^2 - xy - 2x + y^2 + 4y - 1.$$

9. Nariši nivojske krivulje $z = 1$, $z = 4$ in $z = 9$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom

$$z = 4 + 4x + x^2 + y^2.$$

10. **a)** Napiši definicijo parcialnega odvoda funkcije $z(x,y)$ na x.

    b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x,y)$?

    c) Kaj je lastni vektor matrike A?

    d) Kaj je rang matrike A?

    e) Kdaj so trije vektorji v prostoru linearno neodvisni?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (9)

1. Reši sistem enačb glede na možne vrednosti parametra k. Kdaj ima sistem enolično rešitev, kdaj je protisloven, kdaj ima neskončno rešitev?

$$\begin{aligned} x + (1-k)y - 2(1+k)z &= -1 - 2(1+k) \\ (-1+k)y &= 1 \\ x + (1+k)z &= 1 + k \end{aligned}$$

2. Dane tri množice

$$\{\{1,2,0\},\{0,-1,1\},\{1,-1,3\}\}$$

predstavljajo smerni vektor dveh vzporednih premic in po eno točko na vsaki od njih. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje ti dve premici. Nato pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino.

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(1,-2)$ in $(2,-1)$.

   a) Kam preslika vektor $(2,-2)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(-1,-1)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši Taylorjevo vrsto do vključno tretje potence x-a pri razvoju okoli točke 0 in s temi členi izračunaj približno vrednost integrala funkcije $(f(x)-1)/x$ na intervalu $[0,1]$. Funkcija $f(x)$ je e^{-x}.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = 1$, za x, ki je absolutno manj kot $3\pi/4$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Reši začetni problem

$$2y(x) + 2y'(x) + y''(x) = 3, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji

$$2y'(x) - y(x) = \mathrm{e}^{x}, \qquad y(0) = 5.$$

8. Izračunaj ekstreme funkcije:
$$f(x, y) = x^3 - 3xy.$$

9. Nariši nivojske krivulje $z = 1$, $z = 4$ in $z = 9$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom
$$z = 8 - 4x + x^2 - 4y + y^2.$$

10. **a)** Napiši definicijo parcialnega odvoda funkcije $z(x, y)$ na x.

    b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x, y)$?

    c) Kaj je lastni vektor matrike A?

    d) Kaj je rang matrike A?

    e) Kdaj so trije vektorji v prostoru linearno neodvisni?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (10)

1. Reši sistem enačb glede na možne vrednosti parametra k. Kdaj ima sistem enolično rešitev, kdaj je protisloven, kdaj ima neskončno rešitev?

$$\begin{aligned} x + k(-3 + 4(2x + 3y)) &= 0 \\ y + k(2 + 6(2x + 3y)) &= 0 \end{aligned}$$

2. Dane tri množice predstavljajo smerna vektorja dveh sekajočih se premic in njuno skupno točko

$$\{\{1, -1, 0\}, \{0, 0, 2\}, \{2, 1, -1\}\}.$$

Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje ti dve premici. Nato pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino.

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(0, 2)$ in $(-1, 0)$.

   a) Kam preslika vektor $(2, -1)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(1, -2)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši prve 3 člene binomske vrste za približni izračun n-tega korena pri $n = 3$ za $219^{\frac{1}{n}}$.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = -1$, za negativen x, ki je absolutno manj kot $\pi/4$, in je 1 za pozitiven x, ki je absolutno manj kot $\pi/4$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Reši začetni problem

$$y(x) + 2y'(x) + y''(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji

$$y'(x) - \frac{2y(x)}{x} = x, \qquad y(1) = 1.$$

8. Poišči točko na grafu krivulje, ki je najbližja izhodišču. Uporabi metodo vezanega ekstrema. Krivulja je podana z implicitnim izrazom:

$$2 - x + y + (x + y)^2 = 0.$$

9. Nariši nivojske krivulje $z = 1$, $z = 4$ in $z = 9$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom

$$z = 10 + 2x + x^2 + 6y + y^2.$$

10. **a)** Napiši definicijo parcialnega odvoda funkcije $z(x, y)$ na x.
    b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x, y)$?
    c) Kaj je lastni vektor matrike A?
    d) Kaj je rang matrike A?
    e) Kdaj so trije vektorji v prostoru linearno neodvisni?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (11)

1. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike
$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Dane tri množice
$$\{\{2,-1,-1\},\{0,-1,2\},\{0,0,1\}\}$$
predstavljajo smerni vektor premice, eno točko na njej in točko izven premice. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje dano premico in dano točko. Potem pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino.

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(-1,2)$ in $(1,4)$.

   a) Kam preslika vektor $(0,-3)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(1,0)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši Taylorjevo vrsto do vključno tretje potence x-a pri razvoju okoli točke 0 in s temi členi izračunaj približno vrednost integrala funkcije $(f(x)-1)/x$ na intervalu $[0,1]$. Funkcija $f(x)$ je $\sin(x)+1$.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = 1$, za x, ki je absolutno manj kot $3\pi/4$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Na planetu Alfa je pospešek teže na površini enak $g = 2$. Iz začetne točke $(x_0, y_0) = (9,6)$ vržemo kamen s hitrostjo $(v_{x0}, v_{y0}) = (3,4)$. Napiši in reši sistem diferencialnih enačb, ki ustreza Newtonovemu zakonu. Določi največjo višino, ki jo doseže kamen in absciso(x), ko kamen prileti na tla. Nariši še trajektorijo $y(x)$.

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji
$$xy(x) + y'(x) = x, \qquad y(0) = 1.$$

8. Določi dimenzije valja z največjim volumnom, katerega površina je 6π.

9. Nariši nivojske krivulje $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ in $z = 3$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom

$$f(x, y) = 3 - x - y.$$

Z uporabo narisanih izoklin nariši približno rešitev diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$, ki gre skozi točko $(0, 0)$.

10. **a)** Naštej nekaj potrebnih pogojev, da lahko funkcijo razvijemo v Taylorjevo vrsto.

b) Kaj je splošna rešitev diferencialne enačbe 1. reda?

c) Kaj je lastni vektor matrike A?

d) Kaj je majoranta za vrsto?

e) Kaj je partikularna rešitev diferencialne enačbe?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (12)

1. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike
$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -6 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Izračunaj projekcijo (kot vektor) tretjega vektorja na vektorski produkt prvih dveh vektorjev
$$\{\{1,1,0\},\{0,4,0\},\{1,1,3\}\}.$$

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(1,0)$ in $(1,-4)$.

   a) Kam preslika vektor $(2,1)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(3,-1)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši prve 3 člene binomske vrste za približni izračun n-tega korena pri $n = 2$ za $11^{\frac{1}{n}}$.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = -1$, za negativen x, ki je absolutno manj kot $3\pi/4$, in je 1 za pozitiven x, ki je absolutno manj kot $3\pi/4$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Na planetu Alfa je pospešek teže na površini enak $g = 4$. Iz začetne točke $(x_0, y_0) = (8,2)$ vržemo kamen s hitrostjo $(v_{x0}, v_{y0}) = (2,2)$. Napiši in reši sistem diferencialnih enačb, ki ustreza Newtonovemu zakonu. Določi največjo višino, ki jo doseže kamen in absciso(x), ko kamen prileti na tla. Nariši še trajektorijo $y(x)$.

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji
$$xy'(x) - 3y(x) = x^4, \qquad y(1) = 2.$$

8. Izračunaj stacionarne točke funkcije

$$x^2 + y^2 + (-2x^2 + y + 4)z = 0.$$

9. Nariši nivojske krivulje $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ in $z = 3$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom

$$f(x, y) = -8 - 6x - x^2 + y.$$

Z uporabo narisanih izoklin nariši približno rešitev diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$, ki gre skozi točko $(-4, 0)$.

10. **a)** Kaj je začetni problem za diferencialno enačbo 1. reda?

b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x, y)$?

c) Kdaj so trije vektorji v prostoru linearno neodvisni?

d) Kako dobimo ortogonalne trajektorije na dano družino krivulj?

e) Kako izračunamo konvergenčni radij vrste?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (13)

1. Reši sistem enačb glede na možne vrednosti parametra k. Kdaj ima sistem enolično rešitev, kdaj je protisloven, kdaj ima neskončno rešitev?

$$\begin{aligned} x + k(-2 + 4(2x + 2y)) &= 0 \\ y + k(2 + 4(2x + 2y)) &= 0 \end{aligned}$$

2. Dane tri množice

$$\{\{2, 1, -1\}, \{0, 2, 1\}, \{-1, 0, 0\}\}$$

predstavljajo smerni vektor dveh vzporednih premic in po eno točko na vsaki od njih. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje ti dve premici. Nato pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino.

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(3, 2)$ in $(1, 2)$.

   a) Kam preslika vektor $(-1, -2)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(-2, 2)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši prve 3 člene binomske vrste za približni izračun n-tega korena pri $n = 3$ za $127^{\frac{1}{n}}$.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = -1$, za negativen x, ki je absolutno manj kot $\pi/2$, in je 1 za pozitiven x, ki je absolutno manj kot $\pi/2$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Reši začetni problem

$$2y'(x) + y''(x) = x + 2, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji

$$xy(x) + y'(x) = x, \qquad y(0) = 1.$$

8. Poišči točko na grafu krivulje, ki je najbližja izhodišču. Uporabi metodo vezanega ekstrema. Krivulja je podana z implicitnim izrazom:

$$2 - x + y + (x + y)^2 = 0.$$

9. Nariši nivojske krivulje $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ in $z = 3$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom

$$f(x, y) = -9 + 6x - x^2 + y.$$

Z uporabo narisanih izoklin nariši približno rešitev diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$, ki gre skozi točko $(2, 1)$.

10. **a)** Napiši definicijo parcialnega odvoda funkcije $z(x, y)$ na x.

b) Kaj je robni problem za diferencialno enačbo 2. reda?

c) Kaj je to absolutna konvergenca vrste?

d) Kaj je rang matrike A?

e) Naštej nekaj potrebnih pogojev, da lahko funkcijo razvijemo v Fourierovo vrsto.

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (14)

1. Reši sistem enačb glede na možne vrednosti parametra k. Kdaj ima sistem enolično rešitev, kdaj je protisloven, kdaj ima neskončno rešitev?

$$\begin{aligned} x + k(-4 + 4(2x + 4y)) &= 0 \\ y + k(2 + 8(2x + 4y)) &= 0 \end{aligned}$$

2. Zapiši enačbo ravnine, ki gre skozi tri, s koordinatami podane točke. Nato pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino. Točke so:

$$\{\{1,0,0\},\{0,2,0\},\{0,0,2\}\}.$$

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(1,-2)$ in $(2,-1)$.

   a) Kam preslika vektor $(-1,3)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(3,1)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši prve 3 člene binomske vrste za približni izračun n-tega korena pri $n = 3$ za $66^{\frac{1}{n}}$.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = -1$, za negativen x, ki je absolutno manj kot $\pi/2$, in je 1 za pozitiven x, ki je absolutno manj kot $\pi/2$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Na planetu Alfa je pospešek teže na površini enak $g = 8$. Iz začetne točke $(x_0, y_0) = (8,3)$ vržemo kamen s hitrostjo $(v_{x0}, v_{y0}) = (3,5)$. Napiši in reši sistem diferencialnih enačb, ki ustreza Newtonovemu zakonu. Določi največjo višino, ki jo doseže kamen in absciso(x), ko kamen prileti na tla. Nariši še trajektorijo $y(x)$.

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji

$$y'(x) - \frac{2y(x)}{x} = x, \qquad y(1) = 1.$$

8. Poišči točko na grafu krivulje, ki je najbližja izhodišču. Uporabi metodo vezanega ekstrema. Krivulja je podana z implicitnim izrazom:

$$2 - 2x + y + (x + 2y)^2 = 0.$$

9. Nariši nivojske krivulje $z = 1$, $z = 2$ in $z = 3$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom

$$f(x, y) = \sqrt{13 - 6x + x^2 + 4y + y^2}.$$

Z uporabo narisanih izoklin nariši približno rešitev diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$, ki gre skozi točko $(4, -2)$.

10. **a)** Kaj je začetni problem za diferencialno enačbo 1. reda?

b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x, y)$?

c) Kdaj so trije vektorji v prostoru linearno neodvisni?

d) Kako dobimo ortogonalne trajektorije na dano družino krivulj?

e) Kako izračunamo konvergenčni radij vrste?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (15)

1. Reši sistem enačb glede na možne vrednosti parametra k. Kdaj ima sistem enolično rešitev, kdaj je protisloven, kdaj ima neskončno rešitev?

$$\begin{aligned} x + k(-4 + 6(3x + 4y)) &= 0 \\ y + k(3 + 8(3x + 4y)) &= 0 \end{aligned}$$

2. Dane tri množice predstavljajo smerna vektorja dveh sekajočih se premic in njuno skupno točko

$$\{\{2, 1, 0\}, \{0, 1, 1\}, \{-2, -1, -2\}\}.$$

Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje ti dve premici. Nato pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino.

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(4, 1)$ in $(-1, -3)$.

a) Kam preslika vektor $(1, 0)$?

b) Kaj se preslika v vektor $(1, -2)$?

Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši Taylorjevo vrsto do vključno tretje potence x-a pri razvoju okoli točke 0 in s temi členi izračunaj približno vrednost integrala funkcije $(f(x) - 1)/x$ na intervalu $[0, 1]$. Funkcija $f(x)$ je $\sin(x) + 1$.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = 1$, za x, ki je absolutno manj kot $\pi/2$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Reši začetni problem

$$2y'(x) + y''(x) = \mathrm{e}^x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

7. Reši diferencialno enačbo $R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = V\omega\cos(\omega t)$ pri naslednjih podatkih: $R = 1$, $C = 4$, $V = 1$, $\omega = 4$. Nariši grafa homogenega (pri $I(0) = 3$), in periodičnega dela rešitve.

8. Določi radij in višino valja z največjim volumnom, ki ga lahko včrtaš v kroglo z radijem 1.

9. Nariši nivojske krivulje $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ in $z = 3$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom
$$f(x, y) = -2 - x - y.$$
Z uporabo narisanih izoklin nariši približno rešitev diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$, ki gre skozi točko $(-5, 0)$.

10. **a)** Naštej nekaj potrebnih pogojev, da lahko funkcijo razvijemo v Taylorjevo vrsto.
b) Kaj je splošna rešitev diferencialne enačbe 1. reda?
c) Kaj je lastni vektor matrike A?
d) Kaj je majoranta za vrsto?
e) Kaj je partikularna rešitev diferencialne enačbe?

IZPIT IZ MATEMATIKE II
Visokošolski študij
Primer izpita 2004 - 2010 (16)

1. Reši sistem enačb glede na možne vrednosti parametra k. Kdaj ima sistem enolično rešitev, kdaj je protisloven, kdaj ima neskončno rešitev?

$$\begin{aligned} x + k(-2 + 2(x + 2y)) &= 0 \\ y + k(1 + 4(x + 2y)) &= 0 \end{aligned}$$

2. Dane tri množice

$$\{\{2, 2, 2\}, \{0, 1, 2\}, \{-2, -2, 2\}\}$$

predstavljajo smerni vektor dveh vzporednih premic in po eno točko na vsaki od njih. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje ti dve premici. Nato pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino.

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(3, 2)$ in $(-1, 3)$.

   a) Kam preslika vektor $(-2, -2)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(-1, -1)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

4. Napiši prve 3 člene binomske vrste za približni izračun n-tega korena pri $n = 2$ za $26^{\frac{1}{n}}$.

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = -1$, za negativen x, ki je absolutno manj kot $\pi/4$, in je 1 za pozitiven x, ki je absolutno manj kot $\pi/4$, in 0 drugje, s periodo 2π.

6. Na planetu Alfa je pospešek teže na površini enak $g = 4$. Iz začetne točke $(x_0, y_0) = (8, 4)$ vržemo kamen s hitrostjo $(v_{x0}, v_{y0}) = (4, 4)$. Napiši in reši sistem diferencialnih enačb, ki ustreza Newtonovemu zakonu. Določi največjo višino, ki jo doseže kamen in absciso(x), ko kamen prileti na tla. Nariši še trajektorijo $y(x)$.

7. Reši diferencialno enačbo $R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = V\omega \cos(\omega t)$ pri naslednjih podatkih: $R = 3$, $C = 4$, $V = 1$, $\omega = 4$. Nariši grafa homogenega (pri $I(0) = 2$), in periodičnega dela rešitve.

8. Poišči točko na grafu krivulje, ki je najbližja izhodišču. Uporabi metodo vezanega ekstrema. Krivulja je podana z implicitnim izrazom:

$$2 - x + y + (x + y)^2 = 0.$$

9. Nariši nivojske krivulje $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ in $z = 3$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom

$$f(x, y) = -9 - 6x - x^2 + y.$$

   Z uporabo narisanih izoklin nariši približno rešitev diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$, ki gre skozi točko $(-4, 1)$.

10. **a)** Naštej nekaj potrebnih pogojev, da lahko funkcijo razvijemo v Taylorjevo vrsto.

    b) Kaj je splošna rešitev diferencialne enačbe 1. reda?

    c) Kaj je lastni vektor matrike A?

    d) Kaj je majoranta za vrsto?

    e) Kaj je partikularna rešitev diferencialne enačbe?