1. izpit - Matematika II (VSP)
13.6.2014

1. Mojca je šla v trgovino po sadje, s seboj pa je vzela le nekaj denarja. V trgovini je ugotovila naslednje. Če kupi 3 jabolka in 1 hruško, ji ostane 80 centov. Če kupi 1 jabolko in 3 hruške, ji ostane 60 centov. Za nakup 2 jabolk in 4 hrušk pa ima 30 centov premalo.

   (a) Zapiši sistem linearnih enačb, ki opiše situacijo iz naloge.

   (b) Izračunaj, koliko sta ceni 1 jabolka in 1 hruške, ter koliko denarja je Mojca vzela s seboj.

   Rešitev. Označimo x ....cena jabolka,
   y .... cena hruške,
   z ....denar, ki ga ima Mojca.

   Iz pogojev naloge dobimo enačbe

$$\begin{aligned} 3x + y + 80 &= z, \\ x + 3y + 60 &= z, \\ 2x + 4y - 30 &= z. \end{aligned}$$

   Uredimo po spremenljivkah, zapišemo v matrični obliki in pretvorimo v zgornje trikotno obliko

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & -80 \\ 1 & 3 & -1 & -60 \\ 2 & 4 & -1 & 30 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -60 \\ 0 & -8 & 2 & 100 \\ 0 & -2 & 1 & 150 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -60 \\ 0 & -2 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & -2 & -500 \end{array}\right].$$

   Od tod po vrsti izračunamo $z = 250$, $y = 50$ in $x = 40$. Mojca je imela 250 centov, cena 1 jabolke je 40 centov, cena ene hruške pa 50 centov.

2. (a) Zapiši enačbo premice, ki vsebuje točki $A(4, -2, 1)$ in $B(-1, 2, 3)$.

   (b) Pod kakšnim kotom ta premica seka ravnino $x - 2z = 11$?

   (c) Določi presečišče ravnine in premice.

   Rešitev. (a) Smerni vektor premice je $\vec{e} = (4, -2, 1) - (-1, 2, 3) = (5, -4, -2)$. Premica vsebuje točko $A(4, -2, 1)$, zato je njena enačba

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{-2}.$$

   (b) Normala ravnine je $\vec{n} = (1, 0, -2)$. Za kot α med normalo ravnine in smernim vektorjem premice velja

$$\cos\alpha = \frac{\vec{e} \cdot \vec{n}}{|\vec{e}||\vec{n}|} = \frac{9}{\sqrt{45}\sqrt{5}} = \frac{3}{5}.$$

   Kot med ravnino in premico je $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{3}{5}$.

(c) Iz točke (a) razberemo tudi parametrično obliko premice

$$\begin{aligned} x &= 5t + 4, \\ y &= -4t - 2, \\ z &= -2t + 1. \end{aligned}$$

Ko to vstavimo v enačbo ravnine, dobimo rešitev $t = 1$. Presečišče je torej $T(9, -6, -1)$.

3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Izračunaj lastne vrednosti matrike A.

   (b) Izračunaj lastne vektorje, ki pripadajo največji lastni vrednosti.

Rešitev. (a) Lastne vrednosti so rešitve enačbe

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ -4 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0.$$

Za rešitve dobimo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$ (prvo uganemo, ostali dve izračunamo s Hornerjevim algoritmom).

(b) Lastni vektorji pri lastni vrednosti 3 so rešitve homogenega sistema

$$\begin{bmatrix} 1-3 & -1 & -1 \\ -2 & 2-3 & 1 \\ -4 & -2 & -1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

torej

$$v = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Poišči in klasificiraj stacionarne točke funkcije

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x} + xy + 3y.$$

Rešitev. Stacionarne točke so rešitve sistema

$$\begin{aligned} f_x &= -\frac{y^2}{x^2} + y = 0, \\ f_y &= \frac{2y}{x} + x + 3 = 0. \end{aligned}$$

V prvi enačbi lahko izpostavimo y, da dobimo $y(-\frac{y}{x^2} + 1) = 0$. Če je $y = 0$, iz druge enačbe dobimo $x = -3$. Če pa je $y = x^2$, iz druge enačbe dobimo $x = -1$

in zato $y = 1$. Sistem ima torej dve rešitvi $T_1(-3, 0)$ in $T_2(-1, 1)$. Stacionarne točke klasificiramo s pomočjo drugih odvodov

$$\begin{aligned}
A &= f_{xx} = \frac{2y^2}{x^3}, \\
B &= f_{xy} = -\frac{2y}{x^2} + 1, \\
C &= f_{yy} = \frac{2}{x}, \\
D &= AC - B^2.
\end{aligned}$$

V točki $T_1(-3, 0)$ je $D = -1 < 0$, zato je $T_1(-3, 0)$ sedlo, v točki $T_2(-1, 1)$ pa je $D = 3 > 0$ in $A = -2 < 0$, zato je v točki $T_2(-1, 1)$ lokalni maksimum.

5. Pri kateri vrednosti konstante A je diferencialna enačba

$$(3ye^x + Ax^2y^2 + 1)dx + (3e^x + \frac{1}{y} - x^3y)dy = 0$$

eksaktna? Pri tej vrednosti A reši enačbo.

Rešitev. Iz enačbe preberemo $P = 3ye^x + Ax^2y^2 + 1$ in $Q = 3e^x + \frac{1}{y} - x^3y$. Izračunamo odvoda $P_y = 3e^x + 2Ax^2y$ in $Q_x = 3e^x - 3x^2y$. Da bo enačba eksaktna, morata biti ta dva odvoda enaka, zato je $A = -\frac{3}{2}$. Poiskati moramo funkcijo z, za katero velja

$$\begin{aligned}
z_x &= 3ye^x - \frac{3}{2}x^2y^2 + 1, \\
z_y &= 3e^x + \frac{1}{y} - x^3y.
\end{aligned}$$

Iz prve enačbe izračunamo

$$z = \int (3ye^x - \frac{3}{2}x^2y^2 + 1)dx = 3ye^x - \frac{1}{2}x^3y^2 + x + C(y).$$

Od tod izračunamo $z_y = 3e^x - x^3y + C'(y)$ in vstavimo v drugo enačbo, da dobimo $C'(y) = \frac{1}{y}$. Torej je $C(y) = \int \frac{1}{y}dx = \ln y + D$ in $z = 3ye^x - \frac{1}{2}x^3y^2 + x + \ln y + D$. Rešitve diferencialne enačbe so podane z enačbo

$$3ye^x - \frac{1}{2}x^3y^2 + x + \ln y + D = 0.$$