Matematika II (VSP) - Izpit
30.6.2014

1. Dan je paralelogram z oglišči $A(-1,1,2)$, $B(0,-1,4)$ in $C(2,3,3)$.

   (a) Določite koordinate oglišča D.

   (b) Izračunajte ploščino paralelograma.

   (c) Ali je ta paralelogram romb? Odgovor utemeljite.

   Rešitev. Iz podatkov sledi $\vec{AB} = (1,-2,2)$ in $\vec{AD} = \vec{BC} = (2,4,-1)$. Torej je $\vec{r}_D = \vec{r}_A + \vec{AD} = (1,5,1)$. Ploščina paralelograma je enaka

$$pl = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AD}| = |(-6,5,8)| = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

   Ker je $|\vec{AB}| = 3$ in $|\vec{AD}| = \sqrt{21} \neq 3$, paralelogram ni romb.

2. Linearna preslikava $\mathcal{A}$ preslika vektor $(1,0,0)$ v vektor $(1,3,1)$, vektor $(0,1,0)$ v vektor $(-2,-2,0)$ in vektor $(0,0,1)$ v vektor $(2,3,1)$.

   (a) Zapišite matriko A linearne preslikave $\mathcal{A}$ in izračunajte A^2.

   (b) Kateri vektor se s preslikavo $\mathcal{A}$ preslika v vektor $(6,5,1)$?

   Rešitev. Matrika preslikave je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   njen kvadrat pa

$$A^2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Vektor, ki ga iščemo je rešitev sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -3 & -13 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

   Po vrsti izračunamo $z = 3$, $y = -1$ in $x = -2$. Iskani vektor je $(-2,-1,3)$.

3. Dana je funkcija $f(x) = \frac{4}{x-2} + e^{2x}$. Z razvojem v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = 0$ do vključno druge potence približno izračunajte $f(0.1)$.

   Rešitev. Vsak člen posebej razvijemo v Taylorjevo vrsto

$$\frac{4 \quad : (-2)}{x-2 : (-2)} = \frac{-2}{1-\frac{x}{2}} = -2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = -2(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\ldots) = -2-x-\frac{x^2}{2}-\ldots$$

in

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = 1 + 2x + 2x^2 + \ldots.$$

Torej je

$$f(x) = -1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \ldots$$

in zato

$$f(0.1) \approx -1 + 0.1 + \frac{3}{2}(0.1)^2 = -0.885.$$

4. Župan mesta Križkraž se je odločil blizu mesta zgraditi jerdsko elektrarno in cesto mimo nje. Zaradi varnosti mora biti cesta po predpisih speljana vsaj 400 m stran od elektrarne. Načrtovanje izgradnje je župan zaupal mestnemu arhitektu, ki je načrt izrisal v koordinatni sistem, v katerem enota meri 100 m. Arhitekt je v načrtu predvidel, da bo elektrarna zgrajena v točki $T(1,6)$, cesta pa bo potekala po paraboli z enačbo $2x + y^2 - 2 = 0$. Ali arhitektov načrt ustreza predpisom? Odgovor utemeljite.

   Rešitev. Poiskati moramo točko na paraboli, ki je najbližja točki T. Razdalja med točko (x,y) in točko T je enaka

   $$f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-6)^2}.$$

   Iščemo torej vezani minimum te funkcije pri pogoju $2x + y^2 - 2 = 0$. Zapišemo Lagrangeovo funkcijo (koren lahko izpustimo)

   $$F(x,y,\lambda) = (x-1)^2 + (y-6)^2 + \lambda(2x + y^2 - 2).$$

   Vezani ekstremi so rešitve sistema

   $$\begin{aligned} F_x &= 2(x-1) + 2\lambda = 0, \\ F_y &= 2(y-6) + 2\lambda y = 0, \\ F_\lambda &= 2x + y^2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

   Iz prve enačbe izrazimo $\lambda = 1 - x$ in vstavimo v drugo enačbo, da dobimo $2y - 6 - xy$. Od tod izrazimo $x = 2 - \frac{6}{y}$, vstavimo v drugo enačbo in enačbo pomnožimo z y, da dobimo $y^3 + 2y - 12 = 0$. Uganemo rešitev $y = 2$ in s pomočjo Hornerjevega algoritma za preostanek dobimo $y^2 + 2y + 6 = 0$. Ker je diskriminanta tega polinoma negativna, drugih realnih rešitev ni. Poračunamo še $x = -1$. Iskana točka je točka $S(-1,2)$ z razdaljo $f(-1,2) = \sqrt{20} > 4$, torej arhitektov načrt ustreza predpisom.

5. Rešite diferencialno enačbo

   $$y' + 2xy = 3xe^{x^2}$$

   pri začetnem pogoju $y(0) = 1$.

   Rešitev. Enačba je linearna, zato najprej rešimo homogeni del, ki se glasi

   $$y' + 2xy = 0.$$

Uporabimo nastavek $y' = \frac{dy}{dx}$ in enačbo preoblikujemo v

$$\frac{dy}{y} = -2xdx.$$

Integriramo, da dobimo

$$\ln y = -x^2 + \ln C,$$

in antilogaritmiramo, da dobimo

$$y_H = Ce^{-x^2}.$$

Partikularno rešitev poiščemo z variacijo konstante $y_P = C(x)e^{-x^2}$. Odvod je enak $y_P' = C'e^{-x^2} + Ce^{-x^2}(-2x)$. Ko oboje vstavimo v enačbo, dobimo

$$C'e^{-x^2} = 3xe^{x^2}$$

oziroma

$$C' = 3xe^{2x^2},$$

torej je

$$C = \int 3xe^{2x^2}dx = \frac{3}{4}e^{2x^2},$$

pri čemer smo integral na desni izračunali z uvedbo nove spremenljivke $t = 2x^2$. Partikularna rešitev je zato enaka $y_P = \frac{3}{4}e^{2x^2}e^{-x^2} = \frac{3}{4}e^{x^2}$. Splošna rešitev je $y = y_H + y_P = Ce^{-x^2} + \frac{3}{4}e^{x^2}$, iz začetnega pogoja pa izračunamo še $C = \frac{1}{4}$.