1. kolokvij iz Matematike 2

1. letnik elektrotehnike (VSP)

3.4.2001

1. Dani sta pravokotni premici:

$$p_1 \;:\; \frac{x+4}{3} = \frac{y-6}{-5} = \frac{z+1}{1}$$

$$p_2 \;:\; \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{7}$$

   (a) Zapiši enačbo ravnine, na kateri ležita premici p_1 in p_2.

   (b) Določi enačbo premice p_3, ki je pravokotna na premici p_1 in p_2 in poteka skozi njuno presečišče.

2. Z uporabo Gaussove metode izračunaj inverzno matriko dane matrike A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

3. Dana je matrika:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 3 & 3 & -1 \\ 9 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

   (a) Določi vrednost parametra k, pri kateri je 0 lastna vrednost matrike A.

   (b) Določi še preostale lastne vrednosti matrike A in izračunaj lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 0.

Pravilno rešen kolokvij je vreden 50 točk, ki so po nalogah razporejene takole: 1a - 10 točk, 1b - 10 točk, 2 - 10 točk, 3a - 10 točk, 3b - 10 točk.

Čas reševanja kolokvija je 55 minut. Veliko sreče pri reševanju!

Naloga	Točke
1a	
1b	
2	
3a	
3b	
Skupaj	

1.naloga: Dani sta pravokotni premici:

$$p_1 \,:\, \tfrac{x+4}{3} = \tfrac{y-6}{-5} = \tfrac{z+1}{1}$$

$$p_2 \,:\, \tfrac{x+1}{1} = \tfrac{y-1}{2} = \tfrac{z}{7}$$

1. Zapiši enačbo ravnine, na kateri ležita premici p_1 in p_2.
2. Določi enačbo premice p_3, ki je pravokotna na premici p_1 in p_2 in poteka skozi njuno presečišče.

Rešitev:
(a) Normala ravnine bo vektorski produkt smernih vektorjev obeh premic:

$$\vec{n} = \vec{e_1} \times \vec{e_2} = (3, -5, 1) \times (1, 2, 7) = (-37, -20, 11).$$

Enačba ravnine je tedaj $-37x - 20y + 11z - d = 0$, kjer d dobimo kot skalarni produkt točke na eni izmed premic (npr. na p_2) z normalo: $d = (-37, -20, 11) \cdot (-1, 1, 0) = 17$ Iskana enačba ravnine je torej $-37x - 20y + 11z - 17 = 0$.

(b) Smerni vektor iskane premice je enak normali ravnine od prej:

$$\vec{e_3} = \vec{n} = (-37, -20, 11).$$

Poiščemo še presečišče premic p_1 in p_2 - premici najprej zapišemo v parametrični obliki z različnima parametroma:

$$\begin{aligned} p_1 \,&:\, x = -4 + 3t,\ y = 6 - 5t,\ z = -1 + t \\ p_2 \,&:\, x = -1 + s,\ y = 1 + 2s,\ z = 7s \end{aligned}$$

Po izenačenju koordinat dobimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} -4 + 3t &= -1 + s \\ 6 - 5t &= 1 + 2s \\ -1 + t &= 7s \end{aligned}$$

Rešimo ga: $t = 1$, $s = 0$ in rešitev vstavimo v eno izmed parametričnih enačb, da dobimo presečišče $T(-1, 1, 0)$.
Zapišemo še enačbo premice skozi točko T in s smernim vektorjem $\vec{e_3}$:

$$p_3 \,:\, \tfrac{x+1}{-37} = \tfrac{y-1}{-20} = \tfrac{z}{11}$$

2.naloga: Z uporabo Gaussove metode izračunaj inverzno matriko dane matrike A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Rešitev:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right], \ A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3.naloga: Dana je matrika:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 3 & 3 & -1 \\ 9 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Določi vrednost parametra k, pri kateri je 0 lastna vrednost matrike A.

(b) Določi še preostale lastne vrednosti matrike A in izračunaj lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 0.

Rešitev:
(a) Izračunamo $det(A - \lambda I)$:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & k \\ 3 & 3-\lambda & -1 \\ 9 & 9 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + (9k-1)\lambda.$$

Ničla bo lastna vrednost matrike A, kadar bo njen karakteristični polinom $det(A - \lambda I)$ deljiv z λ, to pa je vedno, se pravi da je k lahko poljubno realno število.

(b) Izračunali smo že, da je

$$det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + (9k-1)\lambda.$$

Poleg $\lambda_1 = 0$ sta torej lastni vrednost še ničli kvadratnega polinoma $-\lambda^2 + 2\lambda + (9k-1)$, to pa sta $\lambda_2 = 1 + 3\sqrt{k}$ in $\lambda_3 = 1 - 3\sqrt{k}$. Lastni vektor, ki ustreza lastni vrednosti 0, je $\vec{x}_1 = (1, -1, 0)$. Izračunamo ga kot rešitev homogenega sistema $(A - \lambda_1 I) \cdot \vec{x} = 0$.