2. kolokvij iz Matematike 2

2. letnik elektrotehnike (VSP)

29.5.2001

1. Razvij funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = 0$:

$$f(x) = ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

   Namig: binomska vrsta.

2. Poišči in klasificiraj stacionarne točke funkcije

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{y}.$$

3. Dana je diferencialna enačba:

$$x^2 y' + xy - \frac{1}{x^2} = 0.$$

   (a) Poišči družino krivulj, ki rešijo enačbo.

   (b) Katera izmed tako dobljenih krivulj poteka skozi točko $T(1, \frac{3}{2})$?

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' - 6y' + 9y = 3 + 36x.$$

Pravilno rešen kolokvij je vreden 50 točk, ki so po nalogah razporejene takole: 1 - 10 točk, 2 - 15 točk, 3 - 15 točk, 4 - 10 točk.

Čas reševanja kolokvija je 55 minut. Veliko sreče pri reševanju!

Naloga	Točke
1	
2	
3	
4	
Skupaj	

1.naloga: Razvij funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = 0$:

$$f(x) = ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Rešitev:
Funkcijo odvajamo in odvod razvijemo po binomski formuli:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} x^{2n}.$$

Tako dobljeno vrsto členoma integriramo in dobimo Taylorjevo vrsto za $f(x)$:

$$f(x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Vstavimo $x = 0$ v originalno funkcijo in razvito vrsto in dobimo, da je $C = 0$. Iskana Taylorjeva vrsta je torej:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2.naloga: Poišči in klasificiraj stacionarne točke funkcije

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{y}.$$

Rešitev: Izračunamo oba prva parcialna odvoda funkcije $f(x, y)$:

$$f_x = \frac{2x}{y}, \qquad f_y = \frac{y^2 - x^2 - 1}{y^2}.$$

Ko ju izenačimo z nič, dobimo sistem dveh enačb, katerega rešitve so $x = 0$, $y_{1,2} = \pm 1$. Stacionarni točki sta torej $T_1(0, 1, f(0, 1)) = T_1(0, 1, 2)$ in $T_2(0, -1, f(0, -1)) = T_2(0, 1, -2)$.
Sestavimo Hessejevo matriko drugih parcialnih odvodov:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2y+2y}{y^4} \end{bmatrix}.$$

Izračunamo determinanti Hessejeve matrike za obe stacionarni točki:

$$det H(0, 1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad det H(0, -1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Obe determinanti sta večji od nič, zato sta v obeh točkah ekstrema. $f_{xx}(0, 1) > 0$, zato je v T_1 minimum, $f_{xx}(0, -1) < 0$, zato je v T_2 maksimum.

3.naloga: Dana je diferencialna enačba:

$$x^2y' + xy - \frac{1}{x^2} = 0.$$

1. Poišči družino krivulj, ki rešijo enačbo.
2. Katera izmed tako dobljenih krivulj poteka skozi točko $T(1, \frac{3}{2})$?

Rešitev:
(a) Rešimo najprej homogeno enačbo, ki ima ločljivi spremenljivki:

$$\begin{aligned} x^2y' + xy &= 0 \\ x^2\frac{dy}{dx} + xy &= 0 \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \\ y &= \frac{C}{x} \end{aligned}$$

Z variacijo konstant rešimo nehomogeno enačbo. Nastavek: $y = \frac{C(x)}{x}$, $y' = \frac{C'x-C}{x^2}$. Dobimo enačbo za C':

$$C' = x^{-3} \qquad \Longrightarrow \qquad C = -\frac{x^{-2}}{2} + D.$$

Splošna rešitev enačbe je torej:

$$y = \frac{1}{2x^3} + \frac{D}{x}.$$

(b) Zapišemo začetni pogoj: $y(1) = \frac{3}{2}$ in ga upoštevamo pri splošni rešitvi: $y(1) = -\frac{1}{2} + \frac{D}{1} = \frac{3}{2}$. Torej je $D = 2$ in iskana krivulja je

$$y = \frac{1}{2x^3} + \frac{2}{x}.$$

4.naloga: Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y'' - 6y' + 9y = 3 + 36x.$$

Rešitev:
Homogena enačba: $y'' - 6y' + 9y = 0$. Nastavek je $y = e^{\lambda x}$, s tem dobimo ustrezno karakteristično enačbo

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Ta ima dvojno ničlo $\lambda_{1,2} = 3$. Rešitev homogene enačbe dobimo tako, da upoštevamo dvojnost ničle:

$$y_H = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Nehomogeno enačbo rešimo z naslednjim nastavkom za partikularno rešitev: $y_P = ax + b$, $y' = a$, $y'' = 0$. Vstavimo v enačbo in dobimo: $-6a + 9ax + 9b = 3 + 36x$. S primerjavo koeficientov pri istih potencah x dobimo sistem dveh linearnih enačb za neznanki a in b, ki ima rešitev: $a = 4$, $b = 3$. Partikularna rešitev enačbe je torej

$$y_P = 4x + 3.$$

Splošna rešitev je vsota homogene in partikularne rešitve:

$$y = 4x + 3 + C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$