1. kolokvij iz Matematike 2

1. letnik elektrotehnike (VSP)
4.4.2002

1. naloga - 1. skupina: Reši enačbo:

$$\begin{vmatrix} 2 & x+3 & 4 \\ 3+x & 4+x & 5+x \\ -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Rešitev 1. naloge: Izračunamo dano determinanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & x+3 & 4 \\ 3+x & 4+x & 5+x \\ -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 2x^2.$$

Iz tega sledi: $x_{1,2} = 0$.

1. naloga - 2. skupina: Reši enačbo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3+x & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1+x & 2+x & 3+x \end{vmatrix} = 0.$$

Rešitev 1. naloge: Izračunamo dano determinanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3+x & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1+x & 2+x & 3+x \end{vmatrix} = 2x^2 - 4x = 2x(x-2).$$

Iz tega sledi: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

2. naloga: Pri kateri vrednosti parametra a se dane tri ravnine sekajo v premici? Izračunaj to premico!

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: x + 2y + 3z = a \\ \Pi_2 &: 3z + ay + x = 0 \\ \Pi_3 &: ax + y + 3z = 0 \end{aligned}$$

Rešitev 2. naloge: Po Gaussovi metodi rešimo sistem:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \vdots & a \\ 1 & a & 3 & \vdots & 0 \\ a & 1 & 3 & \vdots & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \vdots & a \\ 0 & a-2 & 0 & \vdots & -a \\ 0 & 1-2a & 3-3a & \vdots & -a^2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \vdots & a \\ 0 & a-2 & 0 & \vdots & -a \\ 0 & 0 & 3(a-2)(a-1) & \vdots & a(a-1)(a+1) \end{array}\right]$$

Da bo presečišče treh ravnin premica, potrebujemo 1-parametrično rešitev sistema. Kandidati za vrednost a, kjer se taka rešitev lahko pojavi, so ničle izrazov v zadnji vrstici, se pravi $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$ ali $a = 2$. Za vsako vrednost a preverimo range rezultirajoče matrike sistema in razširjene matrike sistema in ugotovimo, da se 1-parametrična rešitev pojavi le pri $a = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rešimo ta sistem in dobimo parametrično rešitev: $y = 1, x = -1 - 3z$, z pa je parameter. Ta rešitev nam predstavlja iskano premico, ki jo lahko zapišemo še v standardni obliki:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{z}{1}, y = 1.$$

3. naloga: Poišči preostali dve lastni vrednosti matrike A, če veš, da je prva lastna vrednost $\lambda_1 = 1$. Določi lastni vektor, ki pripada največji lastni vrednosti.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Rešitev 3. naloge: Izračunamo $det(A - \lambda I)$ in dobljeni polinom razstavimo, pri tem, da upoštevamo, da je ena izmed ničel polinoma $\lambda_1 = 1$:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Preostali lastni vrednosti sta torej $\lambda_2 = 2$ in $\lambda_3 = 3$. Lastni vektor, ki pripada največji lastni vrednosti $\lambda_3 = 3$, pa dobimo z rešitvijo homogenega sistema, ki mu pripada matrika $A - \lambda_3 I$:

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zapišemo enačbe za koordinate lastnega vektorja $\vec{x} = (x, y, z)$ in jih rešimo: $x = 0$, $y = -z$, z je parameter. Lastni vektor je torej: $\vec{x} = (0, -1, 1)$.

4. naloga - 1. skupina: Poišči enačbo ravnine, ki je pravokotna na ravnino $x + 4y - 2z = -5$ in na kateri ležita točki $A(1, 2, 3)$ in $B(-2, -1, 3)$.

Rešitev 4. naloge: Normala dane ravnine (označimo jo z $\vec{n_1}$) leži v iskani ravnini. Zato lahko normalo iskane ravnine izrazimo kot vektorski produkt normale $\vec{n_1}$ in vektorja $\vec{AB}$, ki ravno tako leži na tej ravnini:

$$\vec{n_1} \times \vec{AB} = (1, 4, -2) \times (-3, -3, 0) = (-6, 6, 9)$$

Ta vektor še pokrajšamo v normalo: $\vec{n} = (-2, 2, 3)$. Iskana ravnina ima torej enačbo: $-2x + 2y + 3z - d = 0$, $d = \vec{n} \cdot \vec{r_A} = (-2, 2, 3) \cdot (1, 2, 3) = 11$, oziroma $-2x + 2y + 3z - 11 = 0$.

4. naloga - 2. skupina : Poišči enačbo ravnine, na kateri ležita premica $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-1}$ in točka $B(1,2,3)$.

Rešitev 4. naloge: Premica leži v iskani ravnini. Zato lahko normalo iskane ravnine izrazimo kot vektorski produkt smernega vektorja premice $\vec{e}$ in vektorja $\vec{AB}$ (A je točka na premici), ki ravno tako leži na tej ravnini:

$$\vec{e} \times \vec{AB} = (1,3,-1) \times (1,2,3) = (18,-8,-6)$$

Ta vektor še pokrajšamo v normalo: $\vec{n} = (9,-4,-3)$. Iskana ravnina ima torej enačbo: $9x - 4y - 3z - d = 0$, $d = \vec{n} \cdot \vec{r_B} = (9,-4,-3) \cdot (1,2,3) = -8$, oziroma $9x - 4y - 3z + 8 = 0$.