2. kolokvij iz Matematike 2

1. letnik elektrotehnike (UNI+VSP)
30.5.2002

1. naloga: Razvij funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 1$. Funkcija $f(x)$ je dana z naslednjim predpisom:

$$f(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x}$$

Rešitev 1. naloge: Vpeljemo novo spremenljivko: $y = x - 1$ oz. $x = y + 1$. S tem dobimo funkcijo $g(y)$, ki jo bomo razvili okoli točke 0.

$$g(y) = f(x) = f(y+1) = \frac{2(y+1) - 2}{(y+1)^2 - 2(y+1)} = \frac{2y}{y^2 - 1} = \frac{2y}{(y-1)(y+1)}$$

Pri razvoju te funkcije v Taylorjevo vrsto okoli točke 0 si pomagamo z razcepom na parcialna ulomka:

$$\frac{2y}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1}$$

$$2y = A(y+1) + B(y-1)$$

$$2y = Ay + A + By - B$$

Primerjava koeficientov:

$$\begin{aligned} y^1 &: \quad 2 = A + B \\ y^0 &: \quad 0 = A - B \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je: $A = B = 1$. To upoštevamo v funkciji $g(y)$ in nato vsak člen razvijemo v Taylorjevo vrsto.

$$g(y) = \frac{2y}{(y-1)(y+1)} = \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1} = -\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-(-y)} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} y^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1 + (-1)^n) y^n$$

Izvedemo le še obratno substitucijo, da dobimo razvoj $f(x)$ okoli točke $a = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1 + (-1)^n)(x-1)^n$$

2. naloga: V družini krivulj, za katero velja, da je smerni koeficient tangente na krivuljo v poljubni točki enak dvakratni vsoti koordinat te točke, poišči tisto, ki gre skozi točko $T(1, -\frac{3}{2})$.

Rešitev 2. naloge: S pomočjo opisa družine krivulj zapišemo diferencialno enačbo te družine:

$$y' = 2(x + y)$$

$$y' = 2x + 2y$$

To je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda. Najprej rešimo homogeno enačbo, ki ima ločljivi spremenljivki:

$$y' = 2y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\,\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\int \mathrm{d}x$$
$$\ln y = 2x + \ln C$$
$$y = C \cdot e^{2x}$$

To je rešitev homogene enačbe, na kateri izvedemo variacijo konstant, da dobimo rešitev nehomogene enačbe. Nastavek za rešitev nehomogene enačbe bo torej $y = C(x) \cdot e^{2x}$, kjer C ni več konstanta, temveč funkcija spremenljivke x. Potrebujemo še odvod: $y' = C' \cdot e^{2x} + 2C \cdot e^{2x}$. Vstavimo y in y' v nehomogeno enačbo:

$$C' \cdot e^{2x} + 2C \cdot e^{2x} = 2x + 2C \cdot e^{2x}$$
$$C' \cdot e^{2x} = 2x$$
$$C' = 2x \cdot e^{-2x}$$

Da bi dobili funkcijo C, dobljeni odvod integriramo po metodi per partes:

$$u = x,\ \mathrm{d}v = e^{-2x}\,\mathrm{d}x \implies \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$C = \int 2x \cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x\right) = -x \cdot e^{-2x} + \int e^{-2x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -x \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + D$$

Splošna rešitev nehomogene enačbe je torej:

$$y = C \cdot e^{2x} = \left(-x \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + D\right)e^{2x} = -x - \frac{1}{2} + D \cdot e^{2x}$$

Poiščemo še tisto rešitev, ki gre skozi točko $T(1, -\frac{3}{2})$, se pravi tisto, ki ustreza začetnemu pogoju $y(1) = -\frac{3}{2}$:

$$y(1) = -1 - \frac{1}{2} + D \cdot e^2 = -\frac{3}{2}$$
$$D \cdot e^2 = 0$$
$$D = 0$$

Krivulja, ki gre skozi točko T: $y = -x - \frac{1}{2}$.

3. naloga: Reši začetni problem:

$$y'' + y = x^2 + 2 \cdot e^x,\ y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Rešitev 3. naloge: Najprej rešimo homogeno enačbo:

$$y'' + y = 0$$

To je homogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti, zato uporabimo nastavek oblike: $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$. Dobimo:

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Karakteristična enačba ima dve kompleksni ničli: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, za kateri dobimo dve rešitvi diferencialne enačbe: $y_1 = e^{ix}$, $y_2 = e^{-ix}$. Realni rešitvi poiščemo tako, da ti dve rešitvi zapišemo s pomočjo Eulerjeve formule:

$$y_1 = e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x,\; y_2 = e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x$$

Realni rešitvi sta torej $\cos x$ in $\sin x$, splošna rešitev homogene enačbe pa njuna linearna kombinacija:

$$y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Za partikularno rešitev nehomogene enačbe uganemo nastavek glede na nehomogeni del enačbe $(x^2 + 2 \cdot e^x)$:

$$y = Ax^2 + Bx + C + D \cdot e^x,\; y' = 2Ax + B + D \cdot e^x,\; y'' = 2A + D \cdot e^x$$

Vstavimo v enačbo:

$$Ax^2 + Bx + C + D \cdot e^x + 2A + D \cdot e^x = x^2 + 2 \cdot e^x$$

Primerjava koeficientov:

$$\begin{array}{rcl} x^2 & : & A = 1 \\ x^1 & : & B = 0 \\ x^0 & : & C + 2A = 0 \\ e^x & : & 2D = 2 \end{array}$$

Rešitev tega sistema je: $A = 1$, $B = 0$, $C = -2$, $D = 1$, kar nam da naslednjo partikularno rešitev:

$$y_P = x^2 - 2 + e^x$$

Splošna rešitev nehomogene enačbe je torej:

$$y = y_H + y_P = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2 + e^x$$

Poiščemo še rešitev začetnega problema. Najprej potrebujemo še odvod splošne rešitve:

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2x^2 + e^x$$

Sedaj upoštevamo začetna pogoja:

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + 0^2 - 2 + e^0 = -1 + C_1 = 0 \;\rightarrow\; C_1 = 1$$

$$y'(0) = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + 2 \cdot 0^2 + e^0 = 1 + C_2 = 0 \;\rightarrow\; C_2 = -1$$

Rešitev začetnega problema:

$$y = \cos x - \sin x + x^2 - 2 + e^x$$

4. naloga: Poišči in klasificiraj stacionarne točke funkcije

$$f(x, y) = x^3 - xy + y^3.$$

Rešitev 4. naloge: Izračunamo oba prva parcialna odvoda funkcije $f(x,y)$:

$$f_x = 3x^2 - y, \qquad f_y = 3y^2 - x$$

Ko ju izenačimo z nič, dobimo sistem dveh enačb, katerega realne rešitve so $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ ter $x_2 = \frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{1}{3}$ Stacionarni točki sta torej $T_1(0,0,f(0,0)) = T_1(0,0,0)$ in $T_2(\frac{1}{3},\frac{1}{3},f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})) = T_2(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{27})$.
Sestavimo Hessejevo matriko drugih parcialnih odvodov:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{bmatrix}.$$

Izračunamo determinanti Hessejeve matrike za obe stacionarni točki:

$$\det H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad \det H(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Ker je $\det H(0,0) \leq 0$, je v točki T_1 sedlo.
Ker je $\det H(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \geq 0$, je v točki T_2 ekstrem. Ker pa je $f_{xx}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \geq 0$, je ta ekstrem minimum.