KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Visokošolski študij

30. maj 2005

1. [20T] Določi presek ravnine, ki jo določajo točke $A(2,1,-5)$, $B(2,2,0)$ in $C(1,3,2)$, in premice, ki poteka skozi točki $D(4,0,0)$ in $E(8,-3,1)$. **Rešitev:**
   Določimo enačbo ravnine.
   Zapišimo najprej dva vektorja v ravnini.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{AB} = (0,1,5)\\ \vec{b} &= \vec{AC} = (-1,2,7)\end{aligned}$$

   Za zapis enačbe ravnine potrebujemo normalni vektor, ki ga dobimo kot vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 5\\ -1 & 2 & 7\end{vmatrix} = (-3,-5,1)$$

   Izračunajmo še koeficient d:

$$d = (-3,-5,1)\cdot(2,2,0) = -16.$$

   Enačba ravnine se torej glasi:

$$3x + 5y - z = 16.$$

   Sedaj potrebujemo še enačbo premice.
   Smerni vektor premice se glasi:

$$\vec{s} = \vec{DE} = (4,-3,1).$$

   Zatorej se enačba premice v vektorski obliki glasi:

$$\vec{r} = (4,0,0) + t(4,-3,1).$$

   V parametrični obliki pa:

$$\begin{aligned} x &= 4+4t,\\ y &= -3t,\\ z &= t.\end{aligned}$$

   Da dobimo presek, vstavimo zadnje enačbe v enačbo ravnine in dobimo:

$$\begin{aligned} 3(4+4t)+5(-3t)-t &= 16\\ -4t &= 4\\ t &= -1\end{aligned}$$

   Nadalje dobimo:

$$\begin{aligned} x &= 0\\ y &= 3\\ z &= -1\end{aligned}$$

   To nam da točko v preseku: $T(0,3,-1)$.

2. [20T] Razvij funkcijo $f(x) = x$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. **Rešitev:**
Ker je funkcija $f(x) = x$ liha funkcija na intervalu $[-\pi, \pi]$, sta koeficienta a_0 in a_n enaka 0. Torej lahko to funkcijo razvijemo v sinusno Fourierovo vrsto. Izračunati je potrebno samo koeficient b_n.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx \qquad (*)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \underbrace{\frac{1}{n^2}\sin(nx)\Big|_0^{\pi}}_{0}\right)\\
&= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

Na mestu označenem z $(*)$ smo integrirali per partes:

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = \sin(nx)dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n}\cos(nx) \end{array}$$

Razvoj funkcije $f(x)$ v Fourierovo vrsto se tedaj glasi:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx).$$

3. [20T] Poišči stacionarne točke in ekstreme funkcije

$$f(x,y) = e^x(2x + y^2).$$

Rešitev:
Izračunajmo najprej prve parcialne odvode:

$$\begin{aligned} f_x &= e^x(2x + y^2 + 2)\\ f_y &= 2ye^x \end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Torej moramo rešiti sistem:

$$\begin{aligned} 2x + y^2 + 2 &= 0\\ 2y &= 0 \end{aligned}$$

Iz druge enačbe dobimo $y = 0$. To vstavimo v prvo enačbo in dobimo $x = -1$. To nam da eno stacionarno točko: $T(-1, 0)$.
Izračunajmo sedaj druge parcialne odvode:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= e^x(2x + y^2 + 4),\\ f_{yy} &= 2e^x,\\ f_{xy} &= 2ye^x. \end{aligned}$$

Torej se Hessejeva matrika funkcije f glasi:

$$Hf = \begin{bmatrix} e^x(2x + y^2 + 4) & 2ye^x \\ 2ye^x & 2ye^x \end{bmatrix}$$

Oglejmo si sedaj determinanto te matrike v stacionarni točki.

$$\det Hf(-1,0) = \begin{vmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{vmatrix} = 4e^{-2} > 0$$

$f_{xx}(-1,0) = 2e^{-1} > 0$
$\Rightarrow$ V točki $T(-1,0)$ imamo minimum.

4. [20T] Poišči rešitev začetnega problema

$$y'(x) + y(x) = e^{-x}, \qquad y(0) = 3.$$

Rešitev:
Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

- Najprej rešimo homogeni del.

$$\begin{aligned} y' + y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -y \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int dx \\ \ln y &= -x + lnC \\ y_H &= Ce^{-x} \end{aligned}$$

- Nehomogeni del rešimo s pomočjo variacije konstante.

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x)e^{-x} \\ y'(x) &= C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} \end{aligned}$$

  Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = e^{-x}.$$

  Sledi:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-x} &= e^{-x} \\ C'(x) &= 1 \\ C(x) &= \int dx \\ C(x) &= x + D \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(x) = xe^{-x} + De^{-x}$$

Upoštevajmo sedaj še začetni pogoj.

$$3 = y(0) = D$$

$$\Rightarrow D = 3$$

Rešitev začetnega problema se torej glasi:

$$y(x) = xe^{-x} + 3e^{-x}.$$

5. [20T] Reši diferencialno enačbo

$$y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = 14e^{3x}$$

Rešitev:
Dana diferencialna enačba je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

- Rešimo najprej homogeni del:

  $$y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = 0.$$

  Uporabimo nastavek $y = e^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$. Ta polinom razstavimo in dobimo $(\lambda - 2)(\lambda + 4) = 0$, kar nam da dve rešitvi, in sicer $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = -4$.
  Homogeni del rešitve se tako glasi:

  $$y_H = Ae^{2x} + Be^{-4x}$$

- Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka: $y_p = Ce^{3x}$. Odvajamo in dobimo $y_p' = 3Ce^{3x}$ in $y_p'' = 9Ce^{3x}$. To vstavimo v enačbo:

  $$9Ce^{3x} + 6Ce^{3x} - 8Ce^{3x} = 14e^{3x}$$

  $$\Rightarrow C = 2$$

  Dobimo partikularno rešitev:

  $$y_p = 2e^{3x}.$$

  $$\Rightarrow y(x) = y_H + y_p = Ae^{2x} + Be^{-4x} + 2e^{3x}$$