

## REŠITVE

**Naloga 1**

Določi ravnino, ki gre skozi točko  $T(3, 1, 3)$  ter presečišče ravnin  $2x + z = 1$  in  $x - y = 2$ .

Presečišče ravnin  $2x + z = 1$  in  $x - y = 2$  je premica, ki jo dobimo kot rešitev sistema

$$\begin{array}{rcl} 2x & + & z = 1 \\ x & - & y = 2 \end{array}$$

dveh enačb za tri neznanke  $x, y$  in  $z$ . Dobljena 1-parametrična rešitev sistema

$$\begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & -2 + x \\ z & = & 1 - 2x \end{array}$$

ustreza parametrični obliki enačbe premice

$$(x, y, z) = (0, -2, 1) + t(1, 1, -2)$$

s točko  $A(0, -2, 1)$  in smernim vektorjem  $\vec{s} = (1, 1, -2)$ . Točki  $T$  in  $A$  ležita na iskani ravnini in določata vektor  $\vec{AT} = \vec{r}_T - \vec{r}_A = (3, 3, 2)$ . Normalni vektor iskane ravnine dobimo kot vektorski produkt vektorjev  $\vec{s}$  in  $\vec{AT}$ :

$$\vec{s} \times \vec{AT} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (8, -8, 0).$$

Enačba iskane ravnine, ki jo določata točka  $T(3, 1, 3)$  in normalni vektor  $\vec{n} = (1, -1, 0)$ , je torej

$$x - y = \vec{r}_T \cdot \vec{n} = 2$$

oziroma

$$x - y - 2 = 0.$$

**Naloga 2**

Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti so rešitve karakteristične enačbe

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & -4 \\ -1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0,$$

torej  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  in  $\lambda_3 = 3$ . Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti  $\lambda_1 = 1$ , so rešitve homogenega sistema z matriko koeficientov

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

torej vektorji oblike  $\vec{u}_1 = t(1, 1, 0)$ . Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti  $\lambda_2 = 2$ , so rešitve homogenega sistema z matriko koeficientov

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

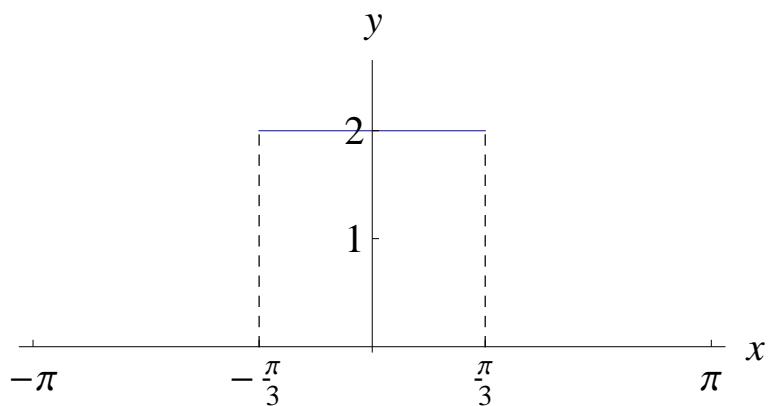
torej vektorji oblike  $\vec{u}_1 = t(0, 1, 0)$ . Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti  $\lambda_3 = 3$ , so rešitve homogenega sistema z matriko koeficientov

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

torej vektorji oblike  $\vec{u}_1 = t(-2, 2, 1)$ .

### Naloga 3

Funkcijo



razvij v Fourierovo vrsto na intervalu  $[-\pi, \pi]$ .

Funkcija  $f(x)$  je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}.$$

Ker je  $f(x)$  soda funkcija, so koeficienti Fourierove vrste naslednji:

$$b_n = 0, \quad n \geq 1$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/3} 2 dx = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} 2 \cos(nx) dx = \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right), \quad n \geq 1$$

Fourierova vrsta za funkcijo  $f(x)$  je torej

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \cos(nx).$$

#### Naloga 4

Poišči najmanjšo in največjo vrednost funkcije

$$f(x, y) = 4x - y$$

na krožnici

$$x^2 + y^2 = 17.$$

Vezani ekstremi funkcije  $f(x, y)$  pri pogoju  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 17$  nastopijo v stacionarnih točkah Lagrangeove funkcije

$$F(x, y; \lambda) = 4x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 17),$$

to je v točkah, ki so rešitve sistema

$$\begin{aligned} F'_x &= 4 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y &= -1 + 2\lambda y = 0 \\ F'_\lambda &= x^2 + y^2 - 17 = 0. \end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb izrazimo  $x = -\frac{2}{\lambda}$  in  $y = \frac{1}{2\lambda}$  ter vstavimo v tretjo enačbo:

$$\frac{4}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 17 = 0.$$

Dobimo  $\lambda^2 = \frac{1}{4}$  oz.  $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$ . Kandidata za vezane ekstreme sta naslednji točki:

$$T_1(-4, 1), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2},$$

$$T_2(4, -1), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Iz geometrijske narave problema sledi, da vezan minimum in maksimum zagotovo obstajata. Funkcijski vrednosti v točkah  $T_1$  in  $T_2$  sta

$$f(-4, 1) = -17$$

$$f(4, -1) = 17,$$

kar pomeni, da funkcija  $f(x)$  zavzame največjo vrednost 17 v točki  $T_2(4, -1)$ , najmanjšo  $-17$  pa v točki  $T_1(-4, 1)$ .

## Naloga 5

Poišči rešitev nehomogene diferencialne enačbe

$$y'' + 4y' + 4y = x + 1.$$

Dana je nehomogena linearna diferencialna enačba reda 2 s konstantnimi koeficienti. Najprej poiščimo splošno rešitev pripadajoče homogene enačbe

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Ker ima karakteristična enačba  $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$  korena  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ , je splošna rešitev

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

Partikularna rešitev nehomogene enačbe bo iste oblike kot desna stran, torej polinom stopnje 1 z neznanimi koeficienti

$$y_p = Ax + B.$$

Nastavek ustavimo v diferencialno enačbo in dobimo pogoj

$$4A + 4(Ax + B) = x + 1.$$

S primerjanjem koeficientov pri posameznih potencah  $x$  dobimo sistem dveh lineranih enačb za  $A$  in  $B$ :

$$\begin{aligned} 4A &= 1 \\ 4A + 4B &= 1 \end{aligned}$$

Rešitev je  $A = \frac{1}{4}$  in  $B = 0$ , torej  $y_p = \frac{1}{4}x$ . Splošna rešitev diferencialne enačbe je

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{4}x.$$