

# KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

## Visokošolski študij

31. maj 2007

1. [20T] Izračunaj ploščino in višino iz oglišča  $C$  v trikotniku z oglišči

$$A(-1, 3, -5), \quad B(2, 1, -2) \quad \text{in} \quad C(1, 3, -2).$$

**Rešitev:**

Določimo dva vektorja:

$$\vec{a} = \vec{AB} = (3, -2, 3),$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = (2, 0, 3).$$

Vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-6, -3, 4).$$

Ploščina trikotnika:

$$p = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{61}.$$

Iz geometrije poznamo formulo:  $p = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot v_C$ . Ker je  $|\vec{a}| = \sqrt{22}$ , je

$$v_C = \frac{2p}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{22}}.$$

2. [20T] Z Gaussovo eliminacijo reši sistem enačb:

$$3x - 2y - u + v = 6,$$

$$x - 3y + 2u - v = 4,$$

$$2x + y + u + 2v = 6.$$

**Rešitev:**

Razširjena matrika:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & 4 & -6 \end{array} \right] \\ & \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Rešitev sistema:

$$x = \frac{17 - 5v}{7},$$

$$y = \frac{1 - 4v}{7},$$

$$u = 1,$$

$$v = \text{polj.}$$

3. [20T] Razvij funkcijo

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$$

v Taylorjevo vrsto okrog točke  $x_0 = 0$ . Zadošča zapisati člene do vključno potence  $x^5$ .  
Namig: binomska vrsta.

**Rešitev:**

Binomska vrsta se glasi:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Razvoj funkcije  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= x(1-x^2)^{-\frac{1}{3}} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{n} (-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{n} (-1)^n x^{2n+1} \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{9}x^5 + \dots \end{aligned}$$

4. [20T] Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y + 4.$$

**Rešitev:**

Prvi parcialni odvodi:

$$\begin{aligned} f_x &= 6x - 2y - 8, \\ f_y &= -2x + 6y + 8. \end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Sistem enačb:

$$\begin{aligned} 6x - 2y - 8 &= 0, \\ -2x + 6y + 8 &= 0. \end{aligned}$$

To je sistem linearnih enačb, ki ima eno rešitev:  $x = 1$ ,  $y = -1$ , torej dobimo eno stacionarno točko  $T(1, -1)$ .

Drugi parcialni odvodi:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6, \\ f_{yy} &= 6, \\ f_{xy} &= -2. \end{aligned}$$

Hessejeva matrika funkcije  $f$ :

$$Hf = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Determinanta te matrike v stacionarni točki:

$$\det Hf(1, -1) = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0.$$

Ker je poleg tega še  $f_{xx}(1, -1) = 6 > 0$ , imamo v točki  $T(1, -1)$  minimum.

5. [20T] Reši diferencialno enačbo

$$xy' + 2y = \frac{\sin x}{x}.$$

Poišči tisto rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju  $y(\pi) = \frac{2}{\pi^2}$ .

**Rešitev:**

To je linearna diferencialna enačba.

(i) Homogeni del.

$$\begin{aligned}xy' + 2y &= 0 \\ \int \frac{dy}{y} &= -2 \int \frac{dx}{x} \\ \ln y &= -2 \ln x + \ln C \\ y_H &= Cx^{-2}\end{aligned}$$

(ii) Nehomogeni del rešimo z variacijo konstante.

$$\begin{aligned}y &= C(x)x^{-2} \\ y' &= C'(x)x^{-2} - 2C(x)x^{-3}\end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$C'(x)x^{-1} - 2C(x)x^{-2} + 2C(x)x^{-2} = \frac{\sin x}{x}.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}C'(x) &= \sin x \\ C(x) &= \int \sin x dx \\ C(x) &= -\cos x\end{aligned}$$

Partikularna rešitev:

$$y_p = -\frac{\cos x}{x^2}$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = -\frac{\cos x}{x^2} + Cx^{-2} = \frac{C - \cos x}{x^2}.$$

Začetni pogoj:

$$y(\pi) = \frac{C + 1}{\pi^2} = \frac{2}{\pi^2} \Rightarrow C = 1.$$

Rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju:

$$y(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$